Non si dà dunque nessun progresso lineare verso le "strutture" e nessuna garanzia assoluta di rigore può essere fornita da un sistema assiomatico-formale.

Cosa si deve sostituire allora a tali certezze storiografiche quando esse si rivelano infondate? " La nuova matematica nacque in rapporto specifico con la produzione"(108). E questa posizione storica va di pari passo con la rivalutazione della matematica applicata (anche rispetto alla didattica).

> ... le applicazioni della matematica come la meccanica neutoniana, fanno parte della nostra tradizione culturale e dell'attività umana della matematica. Imparare il calcolo infinitesimale senza capire cosa indusse al suo sviluppo e come veniva usato da Newton ed altri, è come imparare a suonare le scale sul pianoforte senza che ci sia mostrata alcuna composizione (109).

<u>Alcune filosofie nella matematica non-deduttivistiche: Heyting, Kalmar Lakatos.</u>

Accanto all'affermazione di Dieudonné che la matematica è fatta "di simboli privati di significato" abbiamo visto come altri abbiano rivendicato vigorosamente un suo rapporto con "la pratica", sia come criterio di "esistenza" sia come criterio di "sviluppo".

Dopo il tentativo di Russell di ridurre la matematica alla logica e dopo il formalismo di Hilbert che la confina ai "segni sulla carta" i filosofi di professione si sono dimostrati di gran lunga più sensibili alla prima posizione. Tanto che dentro i tesi di filosofia della matematica si rischia di trovare solo più la logica matematica, uno dei tanti retaggi del neopositivismo che varrebbe la pena riuscire a scrollarsi di dosso e che a causa della sua diffusione non è neanche il caso di richiamare nella nostra analisi.

---

(108) Hodgkin 1976 p. 53

(109) Griffiths & Howson 1974 p. 287.

E' al contrario assai utile riportare le posizioni di alcuni filosofi che sembrano più in accordo con il secondo punto di vista e che, al di là delle differenze specifiche, possiamo chiamare anti-deduttivisti.

– L'intuizionista Heyting ritiene che "nessuna filosofia è necessaria per capire la matematica" perché

> le nozioni base della matematica sono così estremamente semplici, persino triviali, che dubbi intorno alle loro proprietà non sorgono del tutto. L'intuizionismo non è un sistema filosofico come il realismo, l'idealismo o l'esistenzialismo...
> ... la logica è complicata e quindi inadatta come base per la matematica (110)

La "base della matematica" potrebbe stare "nel processo del contare", ma "è ancora troppo complicato" perché richiede il confronto tra un "mondo esterno" ed "i numeri astratti". Il vero atto basilare consiste nell'isolare "entità con un atto mentale più o meno conscio", si tratta di associare "innumerevoli memorie, impressioni e immagini".

> L'entità concepita nella mente umana è il punto di partenza di tutto il pensare ed in particolare della matematica ... la matematica nella forma più semplice rimane confinata nella mente di ognuno (111).

- Qui siamo a monte di tutti i problemi posti dai matematici per i quali lo atto elementare - se ce n'è uno - è "fare la matematica" (da Dieudonné a Ch. Davis). Rispetto allo stesso Errett Bishop si vogliono fondare i numeri interi che per lui sono dati. Il processo del contare si fonda sulla proprietà della nostra mente di fissare una percezione nella memoria e di ripeterla. Non importa ciò che si conta, ma l'atto mentale in sé, così la natura degli oggetti che costituiscono il numero è irrilevante. Arrivati agli interi si possono dimostrare i teoremi che li riguardano, ma questo significa <u>costruire</u> esplicitamente le proprietà in esame.

---

(110) Heyting 1974 p. 122-123

(111) <u>Ibidem</u> p. 123-124

- La difficoltà classica di questo approccio intuizionista sono i numeri reali intesi come "successioni infinite di numeri naturali" perché, diversamente dalla matematica usuale in cui si può considerare l'insieme di tutte le successioni dei razionali che convergono, qui ogni successione va esplicitamente caratterizzata ("costruita") da una legge. Qualcuno a questo punto postula il "continuum" (attraverso l'intuizione del tempo), altri-tra cui Heyting - preferiscono il concetto di "successione di scelta". Esse sono "successioni senza legge nelle quali ogni scelta deve essere completamente libera". Come già abbiamo visto con Bishop queste richieste cambiano l'analisi considerevolmente, ma Heyting preferisce lavorare sui concetti base come quello di "insieme" che ammette possa darsi, contrariamente a Bishop, anche non costruttivamente (112).

- La differenza con ogni fondazione assiomatica e formale è netta.

> La logica non è il fondamento della matematica, al contrario è concettualmente una parte complicata e sofisticata della matematica

Anzi"la logica può essere considerata come una parte delle linguistica o come una teoria filosofica del mondo" perché secondo Heyting "la teoria del linguaggio come ogni teoria attorno al mondo reale è matematica applicata".

> ... la legge del terzo escluso non può essere dimostrata. Se non sappiamo se A è vera o no è meglio non farci sopra asserzioni ... La logica intuizionistica rende possibili distinzioni più sottili, che la logica classica a due valori è incapace di esprimere.

In linea col giudizio già dato sulla logica Heyting però non crede che queste differenze logiche abbiano grande peso(113).

-Gli preme di più prendere le distanze dalla concezione formalistica della

---

(112) Ibidem p. 126-128

(113) Ibidem p. 129-131

matematica.

> Il formalista considera ogni ragionamento matematico intuitivo come inesatto. Studia il linguaggio in cui tali ragionamenti sono espressi e cerca di formalizzarli.

Il risultato è un sistema assiomatico e formale.

> Dal punto di vista intuizionista, questo processo appartiene alla matematica applicata ... Questo sistema formale si può applicare nella scienza e nell'industria; la sua funzione è paragonabile a quella di una macchina in una fabbrica ... è innegabile che gli scienziati e gli ingegneri sono più interessati alle formule matematiche stesse che alla loro interpretazione astratta.

Non ci sarebbe conflitto tra intuizionismo e formalismo se questo ultimo stesse al suo posto come

> costruzione di un sistema formale motivato dalla sua bellezza interna o dalla sua utilità per la scienza e l'industria. Essi si urtano quando i formalisti pretendono che i loro sistemi esprimano il pensiero matematico.

Perché "le costruzioni mentali non possono essere rese esattamente attraverso il linguaggio ..." e le dimostrazioni di consistenza tipiche dei formalisti hanno essenzialmente un significato pratico.

> La pretesa che una dimostrazione di consistenza fornisca una interpretazione del sistema formale è completamente infondata.

- La matematica in questa visione (il termine pare del tutto appropriato) coincide col pensiero primigenio, è la parte ineffabile dell'uomo. Così ogni pensiero cosciente e linguisticamente espresso è di qualità inferiore, ma in quanto valido rimane matematica applicata. Tra la vita di ogni giorno e le scienze più astratte, come tra le scienze naturali e quelle umane la differenza è solo una questione di grado. La discriminante non sta nel metodo,ma "nel modo con cui ottengono la loro materia prima" (114) .

---

(114) <u>Ibidem</u> p. 132-133

- Da tutte le altre posizioni fin qui analizzate alle speculazioni filosofiche di Heyting sono cambiati i problemi, il modo di affrontarli, la terminologia.

La matematica secondo lui è fatta di problemi che il matematico militante neanche considera, la matematica applicata comprende quella che normalmente si chiama pura. Nonostante cerchi di distinguersi dai logici e dai filosofi essi sono quasi gli unici che starebbero ad ascoltarlo. La verità è che la questione della crisi dei fondamenti nei termini coi quali si è data in passato risulta oggi terribilmente invecchiata.

Di tutt'altra natura sono le critiche di L. Kalmar a chi guarda "la matematica come una <<scienza puramente deduttiva>>" Questi matematici dimenticano

> che i loro assiomi furono estratti all'origine da fatti empirici e che le loro regole di inferenza deduttiva sono valide perché esse sono state verificate nell'attuale pratica pensanti [thinking practice] della umanità.

Se si passano in rassegna i risultati negativi legati al problema dei fondamenti della matematica (Logicismo,Intuizionismo e Formalismo)

> dobbiamo rinunciare all'idea classica che i concetti primitivi di una branca della matematica possano essere definiti implicitamente attraverso un sistema di assiomi, ora invece si pensa che un sistema di assiomi definisca le proprietà comuni a tutti i suoi modelli, standard e non-standard, un punto di vista adottato da molto tempo in Algebra. Presto parleremo di <<una teoria degli insiemi>> proprio come oggi parliamo di un gruppo o di un anello.

La speranza di poter dimostrare che la matematica è "una scienza puramente deduttiva stabilmente fondata ... non si è realizzata di fatto mai". Dobbiamo quindi ammettere che

> la consistenza della maggior parte dei nostri sistemi formali è un fatto empirico; persino quando essa è stata dimostrata, l'accettabilità dei metodi matematici usati nella dimostrazione (ad esempio induzione trasfinita fino a qualche ordinale costruttivo) è di nuovo un fatto empirico... Perché non ammettiamo che la matematica, come le altre scienze, è in ultima analisi basata sulla pratica, e che deve essere verificata nella pratica?

Così accanto ai metodi deduttivi si possono usare quelli induttivi usati nelle altre scienze. Se non pensiamo che una asserzione generale dimostrata per induzione sia vera che dire di una asserzione esistenziale dimostrata per deduzione?

> Si ammettano o meno i metodi induttivi in matematica, o ci si confini nella deduzione... i nostri teoremi matematici saranno (almeno parzialmente) verità relative che forse richiederanno modifiche in futuro. Essi possono tuttavia essere approssimazioni alla verità assoluta (cioè a quello che capita in realtà) proprio come lo sono alcune leggi fisiche o come sono supposte esserlo sulla base dell'evidenza pratica.

Si può sviluppare su ciò un programma di ricerca, basta che a questi problemi siano "garantiti i diritti civili" (115)

- Questa posizione presentata ad un congresso di filosofia della scienza nel 1965 ha provocato un'altra reazione furibonda del formalista Y.Bar-Hillel (si ricordi A. Robinson): ma come! dopo i trionfi del formalismo si risuscita l'empirismo? L'intuizionista Heyting ha commentato al proposito che preferisce la concezione di Weyl (intuizionista pure lui). Kleene ha osservato che certo una parte della matematica è empiricamente fondata (ad esempio il teorema di Fermat), ma altre parti sono più sicure come la logica classica, il problema è di dirlo chiaro nelle ipotesi. Paul Bernays ha espresso l'opinione che dare un ruolo all'esperienza gli andrebbe bene anche per la matematica, purché sia però "esperienza mentale". Si potrebbe introdurre una distinzione tra Bar-Hillel e Heyting rispetto agli altri interventi perché in

---

(115) Kalmar 1972 p. 188, 191-194.

sistono a concepire la questione dei fondamenti nei termini obsoleti degli anni '20 e '30'[116].

Kalmar capisce invece che oggi una concezione della matematica per essere valida deve permettere lo sviluppo specialistico e non pretendere "riduzioni" troppo rigide: una teoria degli insiemi deve valere quanto la teoria dei gruppi, non può risultare più uno dei pilastri della matematica. Kalmar si appella infatti molto significativamente ai computer.

> Sembra improbabile che, persino nel migliore dei casi, si estenderà oltre l'analisi classica il campo della matematica dimostrativamente consistente - a meno che i computers, usando l'induzione, o qualche altro principio troppo sofisticato per la mente umana, possano aiutarci nel costruire dimostrazioni di consistenza.

E replica a Bar-Hillel che lo aveva tacciato per questo di frivolezza e di essere inintelligibile.

> Considera forse <<prossimo al frivolo>> o<<inintelligibile >> l'idea di usare un microscopio per osservare oggetti troppo piccoli per gli occhi umani? Perché escludere a *priori* la possibilità di <<allungare>> la mente umana attraverso artefatti, se possiamo in tal modo allungare i sensi umani?[117].

- Siamo in tal modo fuori dalla classificazione che l'empirismo logico fa tra scienze empiricamente fondate (a *posteriori*, fallibili e dotate di contenuto come la fisica ...) e scienze logicamente fondate (a *priori*, tautologiche ed infallibili come le matematiche). Si insinua (giustamente) l'idea che la collocazione professionale nelle varie corporazioni cominci a pesare sui criteri normativi di demarcazione:

> devo attribuire la differenza in stile tra i suoi commenti [Bar-Hillel] e quelli di Heyting, Kleene e Bernays al fatto che gli ultimi sono matematici mentre Bar-Hillel è un filosofo [118].

---

(116) Lakatos 1972 p. 195-207
(117) *Ibidem* p. 191,205
(118) *Ibidem* p. 204

Nonostante che si tratti di qualcosa di più di una differenza in stile e che Kleene e Bernays siano piuttosto dei logico-matematici, l'osservazione sembra tutto sommato azzeccata perché individua la radice pratica e sociale delle "nebulose metafisiche". Ci pare altrettanto importante cogliere - come fa Kalmar-il problema dell'influenza che lo sviluppo tecnologico recente ha oggi di fatto su certe aree della matematica (ci si ricordi anche di Bishop, p38). Si tratta soprattutto di analizzare - se è vero che la matematica si fonda su una pratica - quali modifiche concettuali i computer producano nella ricerca e come si articoli nei dettagli la loro capacità di indurre problemi nuovi, piuttosto che di risolvere "rispettosamente" problemi matematici già dati [119]. Potrà sembrare strano a molti (matematici o meno) che esistano posizioni come quella appena espressa, ancora più singolare allora riulterà loro sapere che non sono isolate. I. Lakatos sostiene, con la consueta lucidità legata alla sua abilità linguistica di produrre terminologie nuove per nuove distinzioni, che "La matematica è quasi-empirica" e che siamo di fronte oggi ad una "rinascita dell'empirismo" nella filosofia della matematica [120].

- Egli riesce a scovare ben tredici affermazioni di sapore para-empirico in alcuni filosofi e logici-matematici, ma anche in due matematici attivi come Weyl e von Neumann. Nell'elenco si trovano persone insospettabili, come un Russell del 1924: la logica è come le equazioni di Maxwell,"ambedue sono credute a causa della verità osservata di alcune delle loro conseguenze logiche". Come un Gödel del 1944: "la matematica... coll'apparire di ulteriori

---

(119) Questo punto ha una importanza centrale, ma purtroppo è largamente assente dalla letteratura. Esiste però l'articolo di Knuth 1974, mentre la "soluzione" del problema dei quattro colori proposta recentemente e che fa uso in modo essenziale del computer potrebbe porre tale questione in primo piano Cfr. Appel & Haken 1977

(120) Lakatos 1976 p.201. Questo lavoro è stato pubblicato postumo, perché Lakatos muore nel 1974, ma ha avuto origine proprio dalla discussione seguita alla conferenza di Kalmar, cui lo stesso Lakatos intervenne. Lakatos 1972 p. 199-202.

assiomi per la teoria degli insiemi sarà sempre più fallibile" e del 1947: gli assiomi "dovrebbero essere assunti almeno nello stesso senso di ogni teoria fisica ben stabilita". Scrive Von Neumann nel 1947:

> Dopo tuttola matematica classica si poggia su fondazioni sane almeno quanto, ad esempio, l'esistenza dell'elettrone.

Il più sospettabile (intuizionista) Weyl sostiene nel 1959:

> una matematica veramente realistica dovrebbe essere concepita, in linea con la fisica, come una branca della costruzione teorica dell'unico mondo reale e dovrebbe adottare la stessa sobria e cauta attitudine verso le estensioni ipotetiche delle proprie fondazioni che viene esibita dalla fisica(121).

- Da buon seguace del suo maestro Popper,Lakatos a questo punto deve andare alla ricerca di altri criteri di demarcazione,visto che le vecchie distinzioni tra scienze induttive e deduttive non funzionano più, ma - abbastanza sorprendentemente per un popperiano - non li trova più distinguendo il contesto della scoperta da quello della giustificazione. Non è solo nell'arrivare alle teorie matematiche ed ai teoremi - come mostra ampiamente anche la storia - che i ricercatori non si sono mai sognati di dedurre (preferendo metodi euristici, intuizioni ed analogie), ma è addirittura nel legittimarli a posteriori (la "ricostruzione razionale") che alcuni matematici paiono preferire oggi criteri empirici. La distinzione di fondo va fatta ora tra teorie "euclidee"e teorie "quasi-empiriche". Nelle prime il criterio di verità scorre dalla cima (gli assiomi) al fondo dove stanno le asserzioni base (i teoremi principali), mentre nelle seconde ciò che scorre è un criterio di falsificazione ed il moto avviene in senso opposto, dal fondo alla cima. La teoria scientifica diventa empirica (come la Fisica) se il criterio di falsificazione è costituito da esperimenti che avvengono nello spazio-tempo.

> Tuttavia gli studi sui fondamenti condussero inaspettatamente alla conclusione che una riorganizzazione Euclidea della matematica come un tut

(121) Ibidem p. 202-204

> to poteva essere impossibile; che almeno le teorie matematiche più ricche erano, come le teorie scientifiche, quasi-empiriche (122).

Anche i grandi sistemi logici classici sono alla fin fine quasi-empirici. Ma allora come distinguere la matematica dalle scienze naturali una volta che anche la matematica è stata resa scienza - nell'accezione di Popper - da un processo di falsificazione possibile ?

> Ora nessuno pretenderà che la matematica sia empirica nel senso che i suoi falsificatori potenziali siano asserzioni spazio-temporali singolari [gli esperimenti].

Ma allora quale è la natura della matematica? "Cioè quali sono i suoi falsificatori potenziali?" Non possono essere solo logici perché se no avremmo una teoria euclidea, ce ne sono invece di "euristici"che misurano la distanza tra la teoria assiomatico-formale e la teoria informale corrispondente. Se un teorema della teoria formale è negato da il teorema corrispondente della teoria informale quest'ultimo è un falsificatore euristico della prima. Il dato di partenza è allora una teoria informale a confronto con una teoria formale quasi-empirica che, sotto la spinta dei falsificatori euristici modifica progressivamente gli assiomi onde ricoprire il più possibile quella informale. Si è preso atto quindi finalmente che non tutta la matematica è formalizzata o formalizzabile. Chi lo pensava né è riuscito a risolvere tutti i problemi logici (consistenza, completezza, decidibilità ...) né è riuscito parimenti a coprire tutto ciò che la comunità dei matematici considerava "matematica". Esistono quindi diverse teorie degli insiemi che

> assolvono il compito di essere la teoria matematica unificante e dominante in cui tutti i fatti matematici disponibili (vale a dire qualche sottoinsieme specifico di teoremi informali) devono essere spiegati.

Secondo la filosofia formalistica, o si dimostra la "consistenza" o bisogna abbandonare la teoria, ma allora tutto il valore "dominante e unificante" andrebbe perso. Secondo il semi-empirista. di una particolare assiomatizzazione

(122) Ibidem p. 205-206,207

della teoria degli insiemi bisogna invece verificare la "correttezza" all'atto della sua traduzione nei vari settori della matematica, ad esempio nell'aritmetica.

Un teorema vero dell'aritmetica come teoria informale, falsifica una particolare teoria degli insiemi in cui esso è falso. Così questa ultima teoria formale diventa falsa (123).

- Si tratta di scegliere ora come modificare o quella teoria degli insiemi o quel teorema dell'aritmetica. Ma a questo punto non si trovano più - in Lakatos - regole normative.

> Ad esempio se capitasse che tutti i sistemi forti della teoria degli insiemi fossero aritmeticamente falsi, si potrebbe modificare la nostra aritmetica - la nuova aritmetica non-standard potrebbe servire, possibilmente altrettanto bene, le scienze empiriche.
>
> Fino ad ora la demarcazione principale è stata tra il dimostrato e l'indimostrato (e tra il dimostrabile e l'indimostrabile); il giustificazionista radicale ("il positivista") eguagliava questa demarcazione a quella tra sensato e privo di senso. Ma ora ci sarà un nuovo problema di demarcazione: <u>il problema di demarcazione tra teorie matematiche verificabili e inverificabili (metafisiche) rispetto ad un insieme dato di asserzioni base</u> (124)...

E veniamo al punto cruciale:

> Un falsificatore euristico dopo tutto è un falsificatore solo in senso pickwickiano: esso non falsifica le ipotesi, solo suggerisce una falsificazione - e una suggestione [suggestion] può <u>essere ignorata</u>. E' solo una ipotesi rivale. Ma questo non separa la matematica dalla fisica così nettamente come si potrebbe pensare. Anche le asserzioni di base popperiane sono solo ipotesi dopo tutto. <u>Il ruolo cruciale delle refutazioni euristiche è di spostare i problemi verso quelli più importanti</u> ...Si può mostrare che la maggior parte delle refutazioni classiche nella storia della scienza e della matematica sono falsificazioni euristiche(125).

---

(123) <u>Ibidem</u> p. 213-214
(124) <u>Ibidem</u> p. 216,217-218 sott. nel testo.
(125) <u>Ibidem</u> p. 218 la prima sott. e dell'autore la seconda è nel testo.

- In questi termini la domanda "quale è la'natura'della matematica" può essere ridotta "in parte" all'altra "quale è la natura delle teorie informali". Quale possibilità del ventaglio va scelta? L'empiricità di Weyl e Kalmar, la costruttivista, la platonista, la convenzionalista?

> La risposta sarà difficilmente monolitica. Accurati studi critici di casi storici condurranno probabilmente a una soluzione composita e sofisticata. Ma qualsiasi possa essere la soluzione i concetti ingenui di una razionalità statica come a priori - a posteriori, analitico -sintetico, nasconderanno solo la loro contingenza (126).

- Il problema di Lakatos a questo punto è la delusione indotta da questa ulteriore crisi del razionalismo classico. Essa conduce dal "torpore e dall'indolenza di una teoria Euclidea ed induttiva ... dove la critica e le teorie rivali sono scoraggiate"(e qui si cita Kuhn) alle "sfide" ed all'"avventura" di lavorare nella "permanente critica delle teorie quasi-empiriche". Capisce che ci si può "girare per analogia ad una immagine errata della scienza".Vede il problema, ma non può risolverlo nel suo schema.

> Ci vorrà qualcosa di più dei paradossi e dei risultati di Gödel per condurre i filosofi a prendere sul serio gli aspetti empirici della matematica e ad elaborare una filosofia del fallibilismo critico che prenda ispirazione non dai cosiddetti fondamenti, ma dalla crescita della conoscenza matematica(127).

C'è voluto qualcosa di più dell'esperimento di Michelson-Morley per arrivare alla teoria della relatività, c'è voluto qualcosa di più delle critiche di Saccheri per arrivare alle geometrie Non-Euclidee. Questo qualcosa di più molti storici non riescono a vederlo nella storia e molti filosofi della matematica non riescono a vederlo nella matematica d'oggi. Certo è più probabile che lo vedano prima quei matematici e quei ricercatori che lavorano e vivono nelle contraddizioni delle loro pratiche scientifiche e del loro ruolo sociale.

---

(126) Ibidem p. 218 sott. nel testo.
(127) Ibidem p. 220

Ma dove andare a cercare questo qualcosa di più che suggerisce l'insufficienza delle analisi "interniste" e richiede di prendere in esame i fattori "esterni", se vogliamo accettare per un momento questa opposizione convenzionale?

Ci sembra oppurtuno partire da quelle controversie storiche di fine '800 e degli anni '20 delle quali, chi per un verso chi per un altro, tutti siamo figli. Solo che per evitare il vicolo cieco di Lakatos sarà necessario guardare alla storia con occhio diverso dal suo. In effetti egli aveva già preparato, attraverso una analisi storica della topologia prima di Poincaré, le tesi qui sostenute schierandosi con l'euristico Polya contro il formalismo e contro Dieudonné (128). Ma prigioniero di un modello popperiano, per quanto sofisticato come teorizzerà in seguito (129), mette "la ricostruzione razionale" nel testo e la storia nelle note.

(128) Lakatos 1963 p. 3

(129) Lakatos 1970 e 1971