La matematica costruttiva di E. Bishop.

Sono le posizioni del tipo di quella di A. Robinson che disturbano sono all'ira le filosofie neopositiviste (70) e che rivelano l'insostenibilità fattuale delle filosofie della storia fondate sul concetto di "progresso". A questo punto ci possiamo allargare a quell'area di dissenso "metafisico" (nell'accezione di Robinson) che arriva fin dentro il nocciolo duro della matematica giungendo a cambiarne i teoremi, come è il caso della "Analisi Costruttiva" di E. Bishop.

- Questa volta si cerca di rifare l'analisi classica partendo dagli interi naturali e considerando come validi solo i risultati ottenibili "costruttivamente" da proposizioni dotate di senso "costruttivo". Dove "costruire" significa prescrivere un meccanismo operativo finito.

> L'oggetto primario della matematica è numero e questo vuol dire gli interi positivi.
>
> Ogni cosa si riattacca al numero ed ogni proposizione matematica in ultima istanza esprime che se si eseguono certe computazioni all'interno dell'insieme degli interi positivi si otterranno certi risultati.
>
> Il nostro programma è semplice - dare significato numerico alla maggior parte possibile dell'analisi classica astratta.
>
> Il compito di rendere l'analisi costruttiva è generato da tre principi base. Primo, rendere ogni concetto affermativo. (Persino il concetto di diseguaglianza è affermativo). Secondo, evitare definizioni che non sono rilevanti (Il concetto di funzione continua punto per punto non è rilevante. Una funzione continua è una che è uniformemente continua su intervalli compatti). Terzo, evitare pseudo generalità (71) .

- Un esempio di proposizione dotata di senso costruttivo è la seguente: ogni intero pari ≥ 4 è la somma di due primi. Darne una dimostrazione costruttiva significa dare un procedimento effettivo e finito che costruisca i due numeri primi la cui somma è il generico pari di partenza. Tipica

---

(70) Bar-Hillel 1972 p. 44

(71) Bishop 1967 p. 2,3,IX,X

dimostrazione non costruttiva è invece quella per assurdo che stabilisce l'esistenza di un oggetto dotato di certe proprietà attraverso le contraddizioni che si ottengono negandola. Un esempio di proposizione priva di senso costruttivo è: esistono 100 cifre consecutive uguali a "7" nello sviluppo decimale di π. Renderla costruttiva significa fissare l'estremo superiore prima del quale i 100 "7" andrebbero trovati, in caso contrario è più una questione di stanchezza che di matematica (72).

- Forse queste richieste possono sembrare non troppo strane, ma il matematico attivo sa che questo rappresenta un programma ben più riduzionistico di quello bourbakista. Esso costringe non solo a rifare i teoremi (questo è una costante storica), ma addirittura a rifiutarne alcuni come indimostrabili o privi di senso, togliendo dalle mani dei matematici molti degli strumenti che essi ritengono indispensabili.

> Per vedere come alcuni dei risultati più fondamentali dell'analisi classica manchino di significato computazionale, si prenda l'asserzione che ogni insieme limitato e non vuoto A di numeri reali ha un estremo superiore... Come altro esempio si consideri il teorema intuitivamente attraente che ogni funzione f continua su un intervallo chiuso $[0,1]$ tale che $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$ si annulla in qualche punto x_o (73).

Per il costruttivista bisogna costruire esplicitamente x_o, ma questo secondo lui è impossibile perché equivarrebbe a trovare metodi per dimostrare su successioni di interi certe proprietà costruttivamente assurde come: per ogni successione di $-1,0,1$ o ogni 1 è preceduto da -1 o ogni -1 è preceduto da 1. Non si usa la definizione classica di continuità punto per punto.

> Classicamente si dimostra che la continuità punto per punto (su un intervallo compatto) implica l'uniforme continuità. Costruttivamente non se ne conosce la dimostrazione, così si assume l'uniforme continuità dall'inizio. Non si perde nulla d'essenziale, e si guadagna una certa

(72) ibidem p. 353-354

(73) ibidem p. 4-5

semplicità (74).

- Altri punti sostanziali in cui la matematica costruttiva si differenzia da quella standard sono la topologia, la teoria degli insiemi, la teoria della misura, il restringersi agli spazi metrici, il che non è poco. Al posto dello spazio topologico si trova lo "spazio di intorni" e la topologia su un insieme X (detto "function space") è costituita da certe funzioni, dette continue, a valori in $\mathbb{R}$ che soddisfano ad opportune condizioni. Il punto di vista moderno sulla topologia e sugli insiemi è stato qui capovolto. I numeri reali(ottenuti si intende dagli interi solo con le loro proprietà costruttive) sono diventati il punto di partenza inducendo la topologia naturale sugli altri insiemi (dati costruttivamente, cioè dando regole meccaniche e finite per stabilire se un elemento sta o no nell'insieme) mediante la specificazione di quali funzioni sono continue. Qui i reali e le funzioni giocano il ruolo primario mentre la topologia generale e gli insiemi sono concetti derivati

> ...una nozione di vicinanza è introdotta classicamente in un insieme X non dando una famiglia di funzioni, ma dando una famiglia di sottoinsiemi, sia aperti che intorni. Classicamente questo è equivalente a dare una famiglia di funzioni da X all'insieme {0,1} mentre costruttivamente c'è una grande differenza perché solo i rarissimi sottoinsiemi liberi di X corrispondono a tali funzioni. Questo succede perché le funzioni sono definite nettamente mentre la maggior parte degli insiemi sono sfumati lungo i bordi ... La verità è che né i "function spaces" né gli "spazi di intorni" sono importanti come certe strutture correlate - spazi metrici e spazi vettoriali normali ... (75)

> - Fu enunciato da Lebesgue, Borel ed altri pionieri della teoria astratta delle funzioni che la matematica che stavano creando poggiava, in modo quasi unico a quei tempi, su metodi insiemistici e conduceva a risultati il cui contenuto costruttivo era problematico. Oggi è vero più che mai che l'analisi astratta non ha una interpretazione costruttiva pronta... L'approccio originale fu di considerare una misura come una funzione definita per insiemi. Più recentemente è diventato popolare considerarla

(74) *Ibidem* p. 60 sott. dell'autore

(75) *Ibidem* p. 71

> una funzione definita per funzioni. Questo approccio si accorda con la nostra filosofia, che le funzioni (almeno quelle continue) dovrebbero essere preferite agli insiemi come oggetti primari di indagine ogni volta che si presenti scelta [76].
>
> -Dal punto di vista costruttivo ci chiediamo se c'è della matematica significativa che non si possa fare, o forse che non si possa fare bene, all'interno dello schema che si è sviluppato. Dal punto di vista classico il problema è di sapere quanto della teoria non metrica e non separabile si possa riscoprire dai nostri risultati e quanto non si possa ... La situazione è facilmente riassunta: gli spazi nonmetrici e gli spazi metrici non separabili non giocano alcun ruolo significativo in quelle parti dell'analisi nelle quali questo libro è coinvolto [77].

Ma è chiaro che Bishop non può sempre rigidamente giocare a sostenere che ciò che non è costruttivo non è importante. In questo è già stato sconfitto l'intuizionista Brouwer, il suo ascendente più vicino, e da lui quindi deve programmaticamente prendere le distanze, in modo assai simile a quelle che prendono i bourbakisti da Hilbert. Bisogna riuscire a salvare buona parte dell'analisi, in caso contrario il programma non avrebbe alcuna credibilità presso gli altri matematici. Si cercano quindi "sostituti costruttivi" ad alcuni risultati e teorie classiche[78]. Ci sembra assai significativo che questo si cerchi di fare nel caso di teoremi dall'evidente interesse applicativo come quello di Birkhoff (teorema ergodico) oppure nel caso della teoria delle algebre di Banach. Si deve ammettere - e se ne da un argomento euristico - che "il teorema di Birkhoff non è costruttivamente valido" essendo "un esempio in cui una successione $\{a_n\}$ di numeri reali che converge classicamente non converge costruttivamente". Inoltre il modo di pensare costruttivo rende una teoria difficile e poco elegante.

---

(76) _Ibidem_ p. 154

(77) _Ibidem_ p. 349

(78) _Ibidem_ p. 359

> La teoria delle algebre di Banach commutative è l'unico esempio in questo libro di una teoria classica la cui versione costruttiva sembra forzata ed innaturale (79).

- Ma cosa significa "sostituto costruttivo" di un risultato? Significa - e qui veniamo ad uno dei nodi principali di questa ideologia - depennare i risultati della matematica dagli aspetti "metafisici" mantenendone i risultati pratici. Uno degli aspetti, secondo Bishop, "metafisici" è costituito dal "principio di onniscienza" che nella forma logica suona

> o tutti gli elementi di A hanno la proprietà P oppure esiste un elemento di A con la proprietà non P (80).

Un sostituto costruttivo è buono se basta aggiungere questo principio per ottenere il risultato classico. Storicamente, questo è il rifiuto esplicito del "non esiste ignorabimus" di Hilbert. Considerato l'uso che noi facciamo del termine ideologia ed il senso dato da Robinson alla parola "metafisica", non dovrebbe meravigliare se il rifiuto di Bishop del principio di onniscienza si trasforma in una richiesta altrettanto "metafisica" ed ideologica di quella che vorrebbe evitare. Cosa significa rifiutare che "per ogni numero reale $x \geq 0$, o $x > 0$, o $x = 0$"? (81).

- Quale è allora l'ideologia della matematica costruttiva? Cioè quali sono le convinzioni profonde che spingono un matematico costruttivo ad un tour de force altrimenti poco spiegabile? Una certa crisi si insinua nel matematico insoddisfatto ed alienato, sia perché isolato dal mondo nonostante il fiorire della disciplina sia perché trova difficoltà a dare significato al suo lavoro.

> Egli non crede che la matematica consista nel derivare brillanti conclusioni da assiomi arbitrari, di concetti truccati e vuoti di contenuto pragmatico, di giochi privi di significato ... La matematica è una mescolanza di reale e di ideale, ora l'uno ora l'altro spesso così presenti che diventa difficile distinguere quale è l'uno e quale è l'altro. La componente realistica della matematica - il desiderio di una

(79) Ibidem p. 233,235
(80) Ibidem p. 9
(81) Ibidem p. 26

> interpretazione pragmatica - fornisce il controllo che determina il corso dello sviluppo e le impedisce di scivolare in un formalismo senza significato. La componente idealistica permette semplificazioni ed apre possibilità altrimenti chiuse. I metodi di dimostrazione e gli oggetti da esaminare sono stati idealizzati in un gioco, ma la condotta reale del gioco è motivata in ultima analisi da considerazioni pragmatiche (82).

Anche se la comunità dei matematici è "unanime nell'accordo su come giocare alla matematica" bisogna cercare di "purgarla completamente dal suo contenuto idealistico" perché "esiste una alternativa soddisfacente" (83). Per cogliere il significato attribuito da Bishop al termine "idealistico" se ne veda l'uso nei seguenti contesti

> un insieme non è un'entità che ha un'esistenza ideale. Un insieme esiste solo quando è stato definito ... Noi prescriviamo almeno implicitamente, cosa dobbiamo fare ... per costruire esplicitamente un elemento dell'insieme ...
>
> La geometria fu altamente idealistica dal tempo di Euclide e degli antichi al tempo di Cartesio, derivata com'era da assiomi ... Cartesio ridusse la geometria alla teoria dei numeri reali (84).

- La matematica classica si contenta dell'esistenza ideale mentre

> L'unico modo di mostrare che l'oggetto esiste è fornire una routine finita per trovarlo (85).

(82) Ibidem p. VIII sott. dell'autore

(83) Ibidem p. IX.

(84) Ibidem p. 14, VIII-IX. La definizione costruttiva di funzione è la seguente:"Una operazione da un insieme A all'insieme B è una regola <<f>> che assegna un elemento <<f(a)>>di B ad ogni elemento <<a>> di A. La regola deve fornire una riduzione esplicita, finita e meccanica del procedimento di costruzione di<<f(a)>> a quello di costruzione di <<a>> . Tale <<f>> si chiama una funzione se <<$f(a_1) = f(a_2)$>> quando <<$a_1 = a_2$>> (univocità)".

(85) Ibidem p. 8

Per questo motivo la radice dell'idealismo sta nel principio di onniscenza: rifiutandolo si rifiuta la logica classica con il principio del terzo escluso (o A o non A). La logica costruttiva è quindi diversa da quella usualmente ammessa in matematica, ad esempio <<p>> non è equivalente a << non (non P)>> e le dimostrazioni per assurdo sono giustificate solo se il numero delle alternative è finito. Il peso di queste scelte non classiche e non formalistiche ne fa una teoria che dipende fortemente dalla propria logica. Ma del resto non si vuole indulgere affatto a considerazioni metamatematiche storicamente battute e poco pragmatiche. La questione della consistenza della matematica vi ha un peso ancora minore che nel programma bourbakista. La dimostrazione matematica non deve evocare assiomi , deduzioni.

> In altre parole, una dimostrazione è una computazione [86].

- Bishop nonostante la sua insistenza sul realismo, sul pragmatismo, sui procedimenti computazionali (cioè meccanici e finiti come le moltiplicazioni tra interi) non può però ridurre la matematica all'efficienza.

> La matematica dovrebbe e deve occuparsi dell'efficienza, forse a detrimento dell'eleganza, ma questi dati verranno alla ribalta solo quando il realismo avrà cominciato a prevalere.
> E' infatti
> un fatto innegabile che la matematica idealistica produceva i risultati più generali con il minimo sforzo [87].

Ma se questo sforzo si meccanizzasse si potrebbe anche sprecare energia. Così fa capolino nelle ultime pagine del libro quello che in realtà potrebbe diventare l'asso nella manica di questo programma oggi minoritario: la computerizzazione della matematica.

> Così come scritto questo libro è adatto alle persone piuttosto che al computer. Sarebbe di grande interesse averne una versione adatta al computer [88].

(86) Ibidem p. 354
(87) Ibidem p. 3,6
(88) Ibidem p. 357

Come non pensare allora che una modificazione sostanziale della matematica indotta da un programma che la riduce agli interi, si accordi nella realtà con la modificazione prodotta dal sempre più intenso uso dei computer nella ricerca scientifica?

Una matematica Materialista?

Dissenso sostanziale nei confronti delle posizioni comunemente sostenute dai matematici si trova espresso anche nel punto di vista di Chandler Davis. Si critica il matematico che "persegue la teoria senza rapportarla alla pratica" si critica la matematica come "scienza da poltrona" che "evita il rapporto con una pratica specifica perché generalizza" (89). Dovrebbe invece essere "materialista", non "idealista" o "platonista" perché non è la mente che la fa esistere o la rende conoscibile bensì il suo collocarsi nell'"universo reale che noi osserviamo attraverso i nostri sensi e di cui il nostro corpo è parte", inoltre bisogna

> collocare la matematica nel suo contesto sociale, capire la sua genesi sociale ed il suo impatto sulla società (90).

Quanto il matematico bourbakista è corporativo, perché si preoccupa essenzialmente di tirare fuori teoremi dal proprio orticello e cerca la legittimazione del proprio fare matematica all'interno del proprio modello produttivo e del proprio gruppo, tanto questo matematico "materialista" la trova fuori. Diventano così centrali le questioni dell'esistenza degli oggetti matematici, della loro utilizzazione, del rapporto con l'esperienza.Ritroviamo qui quella che forse è l'unica costante della "filosofia spontanea" dei matematici, cioé una larga indifferenza ai problemi dei fondamenti, come problema solo logico.

> Uno semplicemente fa matematica seguendo certe regole; queste regole includono (devono includere? in ogni caso di fatto includono)quelle che non hanno apparente giustificazione se non su ipotesi platoniste di esistenza.

---

(89) Davis 1974 p. 38

(90) Ibidem p. 37,39.