

Questa città assomiglia a certe fortezze, riprodotte su antiche stampe, perfettamente pentagonali, o concentriche o quadrate, disegnate in astratto in base ad un principio di simmetria, senza tener conto degli abitanti, principalmente tese a distinguersi dal caos circostante che le nutre e che in caso di pericolo non sono in grado di difendere ⁽⁴⁵⁾.

Articolazioni e critiche al programma bourbakista.

L'ideologia bourbakista è tipicamente francese, fatta com'è di razionalismo, di spirito di casta, di accentramento, non ci si può quindi aspettare che si sia affermata nel mondo matematico internazionale nella sua integrità e senza modificazioni. Rappresenta la trasformazione in un programma coerente - con tutte le scommesse, le schematizzazioni, le esasperazioni e le scelte che questo comporta - di certe linee di tendenza e di alcuni tratti caratteristici delle matematiche d'oggi. Questi consistono in un linguaggio algebrico formale scandito in ben allineati assiomi e teoremi, in uno spiccato senso della separatezza delle matematiche dalle altre scienze, in una grande ramificazione in decine e decine di settori, in una diffusa indifferenza alla propria genesi storica ed al proprio destino. Un tratto che sembra a prima vista assolutamente incompatibile con il bourbakismo è rappresentato dall'estremospecialismo. La classificazione (al 1970) della American Mathematical Society, che viene usata in molte biblioteche ed in riviste di estratti e recensioni come il Mathematical Review, comprende ben 63 sezioni principali.

(45) Per una esposizione più completa, ma apologetica, del programma bourbakista si rimanda a Fang. 1970. Per un ritratto ancor più oleografico, ma che in realtà ne mette in luce i tratti peggiori, non volendo vederne neppure le distanze dalla vecchia problematica logicista si veda D'Amore & Matteuzzi 1976 p. 193. La migliore critica documentata, anche se non sempre in linea con quanto qui sostenuto, è quella di Israel 1977.

- In un paese pragmatico come gli USA l'istanza dello sviluppo e del controllo si è separata da quella dell'unificazione ridotta ad una "filosofia" secondaria. Secondaria, ma presente ed infatti riaffiora esplicitamente in quei momenti - come la didattica - in cui giocoforza il matematico dovrebbe momentaneamente dimenticare il proprio specialismo. Come quella bourbakista, si tratta di una unità di metodo a posteriori, la più adatta alla proliferazione delle discipline, ma diversamente da quella si perde largamente la funzione di discriminazione rigida. Rimane invece, con tutta la sua efficacia, la possibilità di ritrovare postfactum quelle essenze che fanno di una ricerca una ricerca matematica. Metaforicamente se il bourbakismo pretende di essere il setaccio che separa la farina dalla crusca, negli USA si preferisce avere una rapida produzione di miscela di farina e crusca. Se qualcuno pretende di comprare solo farina gli si mostra un bel setaccio (sia stato adoperato o meno a seconda di quanto alto si vuole il mucchio) tanto bastando a garanzia: questo è il metodo. Come dire che il mugnaio ha più larghi margini di libertà nel secondo caso e fuori di metafora in USA i criteri sono assai più scopertamente legati alla corporazione di quanto abbiamo visto essere in Francia. Inoltre l'organizzazione, accademica e di ricerca, liberistica favorisce l'emergere di sottocorporazioni a vario titolo. Addirittura ci sono in USA due grosse associazioni nazionali l'American Mathematical Society e la Mathematical Association of America, la prima più di ricerca la seconda molto attenta alla didattica (46).

- Se in Francia l'organizzazione dei settori matematici è ontologico-piramidale (vale a dire che sulla base alle strutture la classificazione è anche verticale) negli USA è quasi esclusivamente fattuale-orizzontale. La matematica è ciò che si fa nei vari dipartimenti e le discipline stanno potenzialmente sullo stesso piano (però una distinzione sostanziale viene introdotta attraverso i minori o maggiori finanziamenti). Questo spiega perché

(46) La seconda è nata per scissione dalla prima negli anni della grande guerra. Si veda Young 1971 p. 980.

negli USA il bourbakismo riceva serie critiche ed il panorama ideologico sia relativamente più vario che in Francia.

- La prima pubblicazione negli USA degli Eléments è del 1966; non è un grande ritardo tenendo conto che in Francia cominciano ad uscire negli anni '40 e che c'è la guerra, ma è già significativo. Inoltre si traducono solo le parti di topologia generale. Più di dieci anni prima P. Halmos ed E. Artin (algebrista tedesco emigrato negli USA e maestro in Germania di alcuni bourbakisti) avevano recensito rispettivamente certe parti di analisi (l'integrazione) e di algebra sul Bulletin dell'American Mathematical Society.

E' estremamente significativo che le critiche maggiori vengano dal primo mentre il secondo - pur rilevando la astrattezza "impietosa", il voler mettere "i concetti geometrici sullo sfondo" e l'indifferenza alla teoria dei gruppi finiti - loda l'impostazione strutturale generale ⁽⁴⁷⁾. Il peso determinante in questo ultimo giudizio è dato dalla tradizione algebrica tedesca della scuola hilbertiana. L'analista Halmos - allievo di von Neumann - invece non condivide né l'organizzazione del discorso, né certe scelte di teoremi, né certe notazioni terminologiche. "Il trattamento appare artificiale" a causa "della predilezione dell'autore ad usare come definens ciò che per la maggioranza dei matematici è il definendum". Si sottolinea che le scelte non sono adatte alle applicazioni (teoria ergodica e della probabilità) e non servono né come punto di partenza né come stimolo ⁽⁴⁸⁾.

- Ciò nonostante il bourbakismo negli anni sessanta diventa popolare perché si accorda largamente con il movimento didattico della "nuova matematica" ⁽⁴⁹⁾.

(47) Artin 1953 p. 474; che questo non sia proprio un complimento risulta da Artin 1957 p. 14 e seguenti della tr. it.

(48) Halmos 1953 p. 249

(49) Cfr. Kline 1973 e 1977; Tonietti 1977.

The Saturday Evening Post, ci scrive su un articolo che sfrutta il mistero del nome, ma che è significativo del clima. Il matematico F. Browder si preoccupa e scrive allo stesso giornale che, nonostante i volumi del Bourbaki siano chiari, netti, semplici nell'esposizione ed usino "l'approccio algebrico astratto alla matematica",

essi hanno sovraenfascizzato le tendenze algebriche in matematica a spese dell'analisi e della geometria a tal punto che l'esposizione degli Elementi ignora settori maggiori (funzioni analitiche di variabile complessa, teoria delle varietà, topologia algebrica elementare (50)).

- Molte critiche che il manifesto dei 65 fa alla New Math vanno intese fatte anche al bourbakismo (51). Non tutte però, abbiamo visto Dieudonné prendere nettamente le distanze dall'illusione di fondare l'insegnamento della matematica esclusivamente sulla logica e può meravigliare trovare la firma di A. Weil in fondo all'elenco. Una ideologia ben precisa è racchiusa nelle affermazioni che

La matematica separata dalle altre scienze perde una delle sue sorgenti più importanti di interesse e di motivazione.

Il pensiero matematico non è proprio ragionamento deduttivo; non consiste solo di dimostrazioni formali... le argomentazioni induttive, per analogia, le basi intuitive di una congettura emergente sono modi matematici di pensare.

La storia non può stare nelle note perché spiegare un'idea significa ri-ferire la "sua genesi" e tracciarne "la funzione storica"

l'algebra elementare, la geometria piana e solida, la trigonometria, la geometria analitica, ed il calcolo infinitesimale sono ancora fondamentali

i nuovi termini e concetti vanno preceduti da una preparazione sufficientemente concreta e seguiti da genuine e stimolanti applicazioni.

(50) cit. in Fang 1970 p. 8-9.

(51) Tonietti 1977 p. 61.

La matematica non è "un gioco con regole arbitrarie". Tale ideologia non coincide con il bourbakismo come non può piacere ai bourbakisti la commistione tra matematici puri, la IBM, la Bell Telephon, la General Electric e l'Institute for Defense Analysis ⁽⁵²⁾.

- Una ideologia diversa da quella bourbakista circa la questione di come progredisce la matematica si può trovare nel topologo R.H. Bing. Secondo Dieudonné c'è il modo tattico che consiste nell'affrontare ogni problema singolarmente con strumenti ben noti e c'è il modo strategico di analizzare nella loro generalità i concetti chiarendone tutte le connessioni. Anche se si dice che il meglio sta nel mezzo, in realtà il bourbakismo si considera strategico perché il progresso avverrebbe sedimentando nello strutture generali le tecniche usate per risolvere i problemi. Un esempio a mio avviso assai significativo è la partizione che Dieudonné fa tra la topologia algebrica (le famose congetture di Poincaré, le diverse strutture differenziali sulle sfere, la teoria di Morse, i gruppi di omotopia) e l'algebra omologica in cui le precedenti tecniche si generalizzano e si algebrizzano (funtori, sequenze esatte, categorie abeliane... dovute ai bourbakisti Eilenberg, H. Cartan, Grothendieck). La prima parte della storia "non è - nonostante i suoi rimarchevoli successi - la metà secondo me più impressiva" conclude il nostro ⁽⁵³⁾.

- Il modello di Bing si presenta invece decisamente tattico essendo fatto di problemi da risolvere, problemi di contenuto intuitivo che si possono quasi spiegare a tutti con esempi geometrici o di fisica.

(52) Ahlfors et alia 1962 p. 190-2.

(53) Dieudonné 1964 p. 239,243.

Ma pare che Dieudonné abbia recentemente cambiato idea assegnando alla topologia algebrica e differenziale una "densità bourbachista" maggiore che all'algebra omologica, Dieudonné 1976 p. 297.

Diventano allora fondamentali per il progresso le congetture- le intuizioni che un oggetto matematico ha una certa propriet , ma di cui non si conosce ancora n  la dimostrazione n  la falsit  - pi  che i teoremi dimostrati, che sistemano solo formalmente ed a posteriori la questione.

E' solo raramente che problemi cos  difficili come questi sono risolti. Di fatto, forse, quelli sistemati da controesempi saranno altrettanti di quelli sistemati da dimostrazioni. Ho la convinzione che la maggior parte dei teoremi di topologia che sono veri lo sono a causa di qualche semplice principio geometrico che sta sotto. Se c'  un tale principio, all'inizio si pu  scrivere una dimostrazione terribilmente pesante e complicata, ma appena il principio soggiacente viene capito, la dimostrazione emerge chiara. Se non esiste nessun facile principio geometrico soggiacente, la cosa pi  probabile   che la concettura sia falsa (54).

- Cos    venuta fuori un'altra contrapposizione col progetto bourbakista. Perch  l'algebra formale deve avere oggi un ruolo privilegiato? Quale posto ricopre la geometria? Dalla critica del topologo Spanier emerge una concezione della matematica che si definisce non solo internamente, ma "in relazione alle altre discipline". Essa non pu  ridursi ad un elenco di teoremi, soprattutto l'"algebra astratta" non dovrebbe avere il ruolo preminente che ha assunto e che conduce ad ignorare i problemi reali per pensare che "la parte pi  significativa della matematica   lo sviluppo delle strutture astratte"⁽⁵⁵⁾.

- B.E. Meserve riattaccandosi a queste critiche propone esplicitamente che sia la geometria "la porta per la matematica". Egli si poggia anche sul rapporto che il geometra differenziale T.J. Willmore tenne al congresso del 1970 della Mathematical Association of England, intitolato appunto "Dove sta la geometria?:"

(54) Bing 1967 p. 63

(55) Spanier 1970 p. 752,754

Ciò che è importante è un modo geometrico di guardare ad una situazione matematica - geometria è essenzialmente un modo di vita. Noi abbiamo la topologia geometrica, la dinamica geometrica, la geometria algebrica e differenziale, ma non proprio 'la geometria' (56).

E' un tentativo di ritrovare una sorta particolare di unità, senza annullare i vari settori, attraverso lo "spirito" geometrico vale a dire attraverso un peculiare punto di vista nell'affrontare i problemi come è illustrato da questa citazione di Semple & Kneebone.

Il pensiero geometrico più astratto deve conservare qualche legame, per quanto sottile, con l'intuizione spaziale, altrimenti non si potrebbe chiamare geometrico, ed è un fatto storico che... i geometri hanno in continuazione generato chi ha dato un rinnovato impulso alla matematica formale ritornando una volta di più per l'ispirazione al senso geometrico primitivo (57).

Qui l'equilibrio tra "edificio teorico" e "problemi che si presentano naturalmente" sembra pendere verso i secondi.

Come N. Bourbaki si deplora la crescente specializzazione e la mancanza di visione globale, ma diversamente da lui si ricerca la soluzione nella geometria e non nell'algebra astratta.

Il reinserimento della geometria attraverso il riconoscimento degli usi dei suoi modi di pensiero dovrebbe essere consistente con una immagine contemporanea della matematica come soggetto unificato [perché] 1) La geometria fornisce uno o più punti di vista o modi di guardare a quasi tutte le aree della matematica. 2) Le interpretazioni geometriche continuano a fornire preveggenze che conducono sia alla comprensione intuitiva sia al progresso della maggioranza delle aree matematiche. 3) Le tecniche geometriche forniscono strumenti effettivi per risolvere problemi nella maggior parte della matematica (58).

Dall'uso dell'intuizione geometrica si passa a criticare la tendenza a sovrappassare il metodo deduttivo, così tutte le valenze antibourbakiste sono chiare. Se il referente storico principale del programma bourbakista è Hilbert qui ci si richiama alle affermazioni di Poincaré. In questo contesto

(56) Meserve 1973 p. 243

(57) Ibidem p. 242

(58) Ibidem p. 249 e 246.

lo slogan "Basta con Euclide" va inteso che le vecchie regole vanno cambiate e non va trasformato in "Basta con la geometria".

- L'approccio geometrico implica quindi la critica ad altri punti del programma bourbakista come l'assiomatizzazione formalista, ma vale anche il contrario. Cioè chi - anche solo per motivi didattici - preferisce una astrazione che parta da "osservazioni e da esperimenti su materiali concreti" e si verifichi poi nelle applicazioni, dando insieme un ruolo reale alla storia, "per acquistare conoscenza accurata" e per "imparare un pensiero deduttivo dotato di significato", finisce per sostenere che "la geometria è un mezzo migliore dell'algebra" (59).

Queste critiche al bourbakismo hanno radici storiche profonde e non sono frutto del caso, specie nel loro "odore di geometria", come prova la controversia su Thom (60). In ogni caso è già evidente che la geometria classica è il settore peggio trattato dalla ristrutturazione bourbakista.

Se l'algebra è valorizzata al massimo e l'analisi appare percorsa con un certo successo dalle strutture che si intrecciano, la geometria pare destinata solo ad essere smembrata ed atomizzata perdendo vitalità. Così non esiste più il piano, ma lo spazio vettoriale di dimensione 2 con prodotto scalare; non le trasformazioni del piano, ma l'algebra delle matrici; la distanza tra punti è un invariante del gruppo delle rotazioni; una curva algebrica diventa gli zeri di un polinomio; la lunghezza di una curva è la misura di un insieme. Gli acidi bourbakisti mettendo a nudo lo scheletro del le teorie ne dissolvono molti aspetti e nel caso della geometria ne uccidono il singolare spirito unitario. Un certo tipo di unità si fa sempre a spese di qualcos'altro. Non dubito che lo scheletro serva a tener insieme certe specie viventi, ma senza la carne cosa resta della loro vita?

(59) Shibata 1973 p. 265-267

(60) Tonietti 1979.

- Può essere interessante notare come delle quattro o cinque grosse di visioni classiche delle matematiche, (insieme ad Analisi, Algebra, Aritmetica, Fisica Matematica) l'unica sezione rimasta esplicitamente nella classificazione per argomenti dell'America Mathematical Society sia proprio la geometria. Ma essa riguarda infatti problemi ottocenteschi: i fondamenti della geometria, le geometrie euclidee e non, la geometria dei gruppi di trasformazione. E' rimasto il nome a ricordare per contrasto che non le compete più alcuna funzione complessiva, ma solo una nostalgia storica. I fatti - piacciono o meno - oggi stanno così, si intende che possono cambiare, come sempre.

- Come sempre negli ambienti accademici, in cui la carriera scientifica si fa per cooptazione dall'alto, anche questo aspetto assume la coloratura di uno scontro tra corporazioni: i geometri contro gli algebristi. A prima vista sembra una inoffensiva articolazione tra settori specialistici ciascuno dotato delle sue particolari idiosincrasie, ma il succitato caso Thom prova che forse potrebbe trattarsi di uno scontro tra paradigmi, nel senso di Kuhn.

A. Robinson e la Non-Standard Analysis.

Un luogo comune ben radicato nell'ideologia del matematico medio (che lo imparenta quindi con il positivismo logico volgare) è la convinzione dell'irrilevanza per il proprio lavoro delle questioni di Filosofia della Matematica. Nel programma bourbakista questo è del tutto esplicito, arrivando a prendere le distanze dalla Logica Matematica dandone anche severi giudizi di valore, ma persino nelle altre posizioni più pragmatiche e pluraliste si distingue nettamente tra problemi matematicamente interessanti e problemi filosoficamente interessanti. Ciascuna disciplina ha le sue regole, la coesistenza è pacifica se si rispetta la non ingerenza negli affari interni altrui. Nella poco sopra citata classificazione della AMS la Philosophy of Mathematics compare solo come sottosezione della sezione "Generale" e di