n.3. - Lift completo di una pseudoconnessione lineare.

Sia M una varietà differenziabile di classe C^∞ e dimensione n, ogni sistema di coordinate locali (x^i) in un intorno di un punto $p \in M$ induce un sistema di coordinate locali $(x^i, \dot{x}^i)$ sul fibrato tangente $T(M)$, la base naturale nel generico punto $(x;\dot{x})$ di $T(M)$ è data da $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} ; \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}\right)$; se $(x'^{i'})$ è un altro sistema di coordinate locali nell'intorno di $p \in M$, allora sussistono le uguaglianze (c.f.r. [7] pag. 3)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x'^{h'}} = \dfrac{\partial x^h}{\partial x'^{h'}} \dfrac{\partial}{\partial x^h} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}'^{h'}} = \dfrac{\partial^2 x^h}{\partial x'^{h'} \partial x'^{i'}} \dot{x}'^{i'} \dfrac{\partial}{\partial x^h} + \dfrac{\partial x^h}{\partial x'^{h'}} \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}^h} \end{cases}$$

Se $f \in \mathfrak{F}(M)$ si chiama lift verticale di f la funzione $f^V = f \circ \pi$ essendo $\pi : T(M) \to M$ la proiezione del fibrato tangente $T(M)$.

Se X è un campo di vettori su M rappresentato localmente da $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ il lift verticale di X è il campo vettoriale X^V su $T(M)$ rappresentato localmente da: $X^V = X^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$; si chiama invece lift completo di X, il campo di vettori X^C su $T(M)$ rappresentato localmente da: $X^C = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{x}^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$

Prop. 3.1.- Sia (A,∇) una pseudoconnessione lineare su M, allora esiste una ed una sola pseudoconnessione lineare (A^C,∇^C) su $T(M)$ univocamente caratterizzata dalle condizioni:

(1) $A^C(X^C) = (A(X))^C \qquad \forall X \in \mathfrak{D}_1(M)$

(2) $\nabla^C_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{D}_1(M)$

Dimostrazione. -

La (1) dice che A^C è il lift completo del campo tensoriale A, che è univocamente determinato (c.f.r. [7] pag. 20).

Sia $(A^C, \tilde{\nabla})$ una pseudoconnessione lineare su $T(M)$ tale che:

$$(3) \qquad \tilde{\nabla}_{X^C} Y^C = (\nabla_X Y)^C \qquad \forall X, Y \in \mathcal{D}_1(M)$$

allora tenendo conto che (c.f.r. [7] pag. 14):

$$(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C \qquad \forall f \in \mathcal{F}(M);\ \forall X \in \mathcal{D}_1(M)$$

si ottiene:

$$\tilde{\nabla}_{X^C}(fY)^C = \tilde{\nabla}_{X^C}(f^C Y^V + f^V Y^C) = A^C(X^C)(f^C)Y^V +$$

$$+ A^C(X^C)(f^V)Y^C + f^C \tilde{\nabla}_{X^C} Y^V + f^V \tilde{\nabla}_{X^C} Y^C =$$

$$= (A(X)(f))^C Y^V + (A(X)(f))^V Y^C + f^V(\nabla_X Y)^C + f^C \tilde{\nabla}_{X^C} Y^V .$$

D'altra parte risulta anche:

$$\tilde{\nabla}_{X^C}(fY)^C = (\nabla_X fY)^C = (f \nabla_X Y + A(X)(f)Y)^C =$$

$$= f^C(\nabla_X Y)^V + f^V(\nabla_X Y)^C + A(X)(f)^C Y^V + A(X)(f)^V Y^C$$

da cui si ricava che:

$$(4) \qquad \tilde{\nabla}_{X^C} Y^V = (\nabla_X Y)^V$$

In modo analogo si prova che:

$$(5) \qquad \tilde{\nabla}_{X^V} Y^C = (\nabla_X Y)^V$$

Dalla (3) (o anche dalla (4) si deduce che

$$\tilde{\nabla}_{X^V} Y^V = 0 \tag{6}$$

infatti

$$\tilde{\nabla}_{(fX)^C} Y^V = \tilde{\nabla}_{f^C X^V + f^V X^C} Y^V = f^C \tilde{\nabla}_{X^V} Y^V + f^V (\nabla_X Y)^V$$

$$\tilde{\nabla}_{(fX)^C} Y^V = (\nabla_{fX} Y)^V = (f\nabla_X Y)^V = f^V (\nabla_X Y)^V$$

Le uguaglianze (3)(4)(5)(6) provano che la pseudoconnessione lineare $(A^C, \tilde{\nabla})$ se esiste è unica.

Per dimostrare l'esistenza si fissi una carta locale (V,ϕ) su M e sia (x_i) il relativo sistema coordinato; è noto che $(x_1^C,\dots,x_n^C;\ x_1^V,\dots,x_n^V)$ è un sistema coordinato su $T(M)$; su $\pi^{-1}(U)$ si definisce una pseudoconnessione lineare $(\tilde{A}^{(U)}, \tilde{\nabla}^{(U)})$ univocamente determinata dalle condizioni:

$$(7) \quad \begin{cases} \tilde{A}^{(U)} = (A^{(U)})^C \\ \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^C} X_j^C = (\nabla^{(U)}_{X_i} X_j)^C \\ \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^V} X_j^C = (\nabla^{(U)}_{X_i} X_j)^V \\ \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^C} X_j^V = (\nabla^{(U)}_{X_i} X_j)^V \\ \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_i^V} X_j^V = 0 \end{cases}$$

dove $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1,\dots,n)$ ed $(A^{(U)}, \nabla^{(U)})$ è la pseudoconnessione linea_ re indotta da (A,∇) su U.

Se (W,Ψ) è un'altra carta locale su M tale che $U \cap W \neq \emptyset$ e se $(\tilde{A}^{(W)}, \tilde{\nabla}^{(W)})$ è la pseudoconnessione lineare su $\pi^{-1}(W) \subset T(M)$ definita dalla (7), allora si può verificare facilmente che su $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(W)$ le pseudoconnessioni lineari indotte rispettivamente da $(\tilde{A}^{(U)}, \tilde{\nabla}^{(U)})$ e $(\tilde{A}^{(W)}, \tilde{\nabla}^{(W)})$, sono le stesse; resta così definita globalmente su $T(M)$ una pseudoconnessione lineare $(\tilde{A},\tilde{\nabla})$ soddisfacente le condizioni volute.

Indicato con (y_i) il sistema coordinato relativo alla carta (W,Ψ) e posto $Y_i = \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ si proverà per brevità che in $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(W)$ si ha:

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^C} Y_j^C = \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^C} Y_j^C = (\nabla_{Y_i} Y_j)^C \quad .$$

Infatti posto $Y_i = \xi_i^j X_j$, si ha:

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^C} Y_j^C = \tilde{\nabla}^{(U)}_{(\xi_i^h)^C X_h^V + (\xi_i^h)^V X_h^C} ((\xi_j^k)^C X_k^V + (\xi_j^k)^V X_k^C) =$$

$$= (\xi_i^h)^C (A^C(X_h^V)(\xi_j^k)^C) X_k^V + (\xi_i^h)^C (A^C(X_h^V)(\xi_j^k)^V) X_k^C +$$

$$+ (\xi_i^h)^V (A^C(X_h^C)(\xi_j^k)^C) X_k^V + (\xi_i^h)^V (A^C(X_h^C)(\xi_j^k)^V) X_k^C +$$

$$+ (\xi_i^h)^C (\xi_j^k)^C \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^V} X_k^V + (\xi_i^h)^C (\xi_j^k)^V \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^V} X_k^C +$$

$$+ (\xi_i^h)^V (\xi_j^k)^C \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^C} X_k^V + (\xi_i^h)^V (\xi_j^k)^V \tilde{\nabla}^{(U)}_{X_h^C} X_k^C \quad .$$

Tenendo conto che:

$$A^C(X_h^V)(\xi_j^k)^C = (A(X_h))^V (\xi_j^k)^C = (A(X_h)(\xi_j^k))^V$$

$$A^C(X_h^C)(\xi_j^k)^C = (A(X_h))^C (\xi_j^k)^C = (A(X_h)(\xi_j^k))^C$$

$$A^C(X_h^V)(\xi_j^k)^V = (A(X_h))^V(\xi_j^k)^V = 0$$

$$A^C(X_h^C)(\xi_j^k)^V = (A(X_h))^C(\xi_j^k)^V = (A(X_h)(\xi_j^k)^V$$

ed usando le (7), si ottiene

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^C} Y_j^C = (\xi_i^h)^C(A(X_h)(\xi_j^k))^V X_k^V + (\xi_i^h)^V(A(X_h)(\xi_j^k))^C X_k^V +$$

$$+(\xi_i^h)^V(A(X_h)(\xi_j^k))^V X_k^C + (\xi_i^h)^C(\xi_j^k)^V(\nabla_{X_h} X_k)^V +$$

$$+(\xi_i^h)^V(\xi_j^k)^C(\nabla_{X_h} X_k)^V + (\xi_i^h)^V(\xi_j^k)^V(\nabla_{X_h} X_k)^C \quad .$$

Ma:

$$(fg)^V = f^V g^V$$

$$(fg)^C = f^C g^V + f^V g^C$$

e quindi si ottiene in definitiva:

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^C} Y_j^C = (\xi_i^h A(X_h)(\xi_j^k))^C X_k^V + (\xi_i^h A(X_h)(\xi_j^k))^V X_k^C +$$

$$+(\xi_i^h \xi_j^k)^C(\nabla_{X_k} X_k)^V + (\xi_i^h \xi_j^k)^V(\nabla_{X_h} X_k)^C =$$

$$=(\xi_i^h A(X_h)(\xi_j^k)X_h)^C + (\xi_i^h \xi_j^k \nabla_{X_h} X_k)^C =$$

$$= (A(Y_i)(\xi_j^k)X_k + \xi_j^k \nabla_{Y_i} X_k)^C = (\nabla_{Y_i} Y_j)^C =$$

$$= \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^C} Y_j^C \quad .$$

In modo analogo si provano le uguaglianze:

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^C} Y_j^V = \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^C} Y_j^V$$

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^V} Y_j^C = \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^V} Y_j^C$$

$$\tilde{\nabla}^{(U)}_{Y_i^V} Y_j^V = \tilde{\nabla}^{(W)}_{Y_i^V} Y_j^V = 0 \quad .$$

La proposizione è così completamente provata.

<u>Osservazione</u> 3.1.-

Mantenendo le notazioni della proposizione precedente, si ponga per semplicità:

$$\tilde{X}_i = X_i^C$$

$$\tilde{X}_{n+i} = X_i^V$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}_A} \tilde{X}_B = \tilde{\Gamma}^D_{AB} \tilde{X}_B$$

dove $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; $X_i^C = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$; $X_i^V = \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$ con $i = 1,\dots,n$

$A,B,C,D = 1,2,\dots,2n$; dalle (7) si ottengono allora le uguaglianze:

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} \; ; \; \tilde{\Gamma}^k_{i\; n+j} = 0 ; \; \tilde{\Gamma}^k_{n+i\; j} = 0 \; ; \; \tilde{\Gamma}^k_{n+i\; n+j} = 0$$

$$\tilde{\Gamma}^{n+k}_{ij} = \dot{x}^m \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^m} \; ; \; \tilde{\Gamma}^{n+k}_{i\; n+j} = 0 \; ; \; \tilde{\Gamma}^{n+k}_{n+i\; j} = 0 \; ; \; \tilde{\Gamma}^{n+k}_{n+i\; n+j} = 0 \quad .$$

Inoltre dalle (3.31) c.f.r.[7] pag. 21, si ha:

$$\tilde{A}^j_h = A^j_h \; ; \; \tilde{A}^j_{n+h} = 0 \; ; \; \tilde{A}^{n+j}_h = \dot{x}^m \frac{\partial A^j}{\partial x^m} \; ; \; \tilde{A}^{n+j}_{n+h} = A^j_h$$

dove $(A^j_h; \Gamma^k_{ij})$ sono le componenti di (A,∇) rispetto alla carta (U,ϕ) prefissata.

<u>Osservazione 3.2</u>.-

Poiché per ogni $X,Y \in \mathfrak{D}_1(M)$ risulta $[X^C,Y^C] = [X,Y]^C$ (c.f.r.[7] pag. 16) il tensore di torsione e l'applicazione di curvatura di (A^c,∇^c) sono uguali rispettivamente al lift completo del tensore di torsione e dell'applicazione di curvatura di (A,∇).

Si supponga ora che M sia una varietà fogliettata e sia (A,∇) una pseudo connessione lineare su M; sussiste la seguente proposizione:

Prop. 3.2. - La sottovarietà D di $T(M)$ è autoparallela rispetto al lift completo (A^c,∇^c) se e solo se (A,∇) è fogliettata.

Dimostrazione.

In ciò che segue si suppone che gli indici i,j,k,ℓ,r,s variano da 1 ad n; α,β,γ da 1 ad r; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ da $r+1$ ad n.

Se D è autoparallela rispetto ad (A^c,∇^c) allora deve aversi:

(1) $$A^c\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \in \mathfrak{D}_1(D)$$

(2) $$A^c\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\right) \in \mathfrak{D}_1(D)$$

(3) $$\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{D}_1(D)$$

(4) $$\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha} \in \mathfrak{D}_1(D)$$

(5) $$\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{D}_1(D)$$

(6) $$\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \in \mathfrak{D}_1(D)$$

Essendo $A^C\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = A_i^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \dot{x}_j \frac{\partial A_i^h}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ dalla (1) segue che

$\dot{x}_\alpha \frac{\partial A_i^{\bar\beta}}{\partial x_\alpha} = 0.$

Dalla (2) poiché $A^C\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}\right) = A_\alpha^C \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ si ha: $A_\alpha^{\bar\beta} = 0$

Dalla (3) poiché $\nabla^C_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^r \frac{\partial}{\partial x_r} + \dot{x}_\ell \frac{\partial \Gamma_{ij}^s}{\partial x_\ell} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_s}$ si ha:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{\bar\beta}}{\partial x_\alpha} = 0$$

Dalla (4) poiché $\nabla^C_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha} = \Gamma_{i\alpha}^\ell \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ si ha: $\Gamma_{i\alpha}^{\bar\beta} = 0$.

Dalla (5) poiché $\nabla^C_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{\alpha j}^\ell \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\ell}$ si ha $\Gamma_{\alpha j}^{\bar\beta} = 0.$

Dalla (6) infine risulta $\nabla^C_{\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\beta} = 0$

si conclude allora per la prop. 1.2 che (A,∇) è fogliettata. In modo analogo si prova il viceversa. ∎

Dalla proposizione ora provata, dalla prop. 2.3 e dal teorema 2.1 segue immediatamente la proposizione:

Prop. 3.3.- <u>La sottovarietà</u> D <u>è autoparallela rispetto al lift completo</u> (A^C,∇^C) <u>di</u> (A,∇) <u>se e solo se</u> (A,∇) <u>mantiene</u> $\mathcal{D}$ <u>parallela e la pseudo-connessione</u> $\overset{*}{\Gamma}$ <u>indotta da</u> (A,∇) <u>sul fibrato trasverso</u> $Q = T(M)/D$ <u>è proiettabile.</u>