$$T(X,Y) = T'(X,Y) - S(X,Y) - \nabla_Y X + \nabla'_Y X$$

allora se $X \in \mathfrak{D}$ per ipotesi deve aversi $T'(X,Y) \in \mathfrak{D}$, $\nabla'_Y X \in \mathfrak{D}$, inoltre essendo $\nabla_Y X = \nabla'_Y X + S(Y,X)$, risulta ovviamente anche $\nabla_Y X \in \mathfrak{D}$; si conclude allora che $T(X,Y) \in \mathfrak{D}$ per ogni $X \in \mathfrak{R}$ quindi (A,∇) è trasversa.

Def. 1.3.- Una pseudoconnessione lineare (A,∇) su M si dice che conserva parallela la distribuzione $\mathfrak{D}$ se soddisfa alle condizioni:

$$A(X) \in \mathfrak{D}$$
$$\nabla_Y X \in \mathfrak{D}$$

per ogni $X \in \mathfrak{D}$ e per ogni $Y \in \mathfrak{D}_1(M)$.

Ovviamente ogni pseudoconnessione lineare fogliettata è anche trasversa e ogni pseudoconnessione lineare trasversa conserva la distribuzione $\mathfrak{D}$ parallela, ma non viceversa.

n.2. - Pseudoconnessioni sul fibrato trasverso.

In questo paragrafo si denoterà con M una varietà differenziabile paracompatta fogliettata, con fogliazione definita da una distribuzione involutoria $\mathfrak{D}$ di dimensione r; la distribuzione $\mathfrak{D}$ individua un sottofibrato D del fibrato tangente TM, di dimensione r, essendo la fibra sopra $x \in M$ il sottospazio $\mathfrak{D}_x$ dello spazio tangente $T_x(M)$, il fibrato $Q = T(M)/D$ è il fibrato trasverso al fogliettamento; ogni punto di Q è una classe di equivalenza $\{X_x\}$ dove $X_x \in T_x(M)$, e due vettori X_x e Y_x di $T_x(M)$ appartengono alla stessa classe di equivalenza se la loro differenza $X_x - Y_x$ appartiene al sottospazio $\mathfrak{D}_x$.

Prop. 2.1.- Ogni pseudoconnessione lineare (A,∇) su M che conserva parallela la distribuzione $\mathfrak{D}$, induce una pseudoconnessione $\overset{*}{\Gamma}$ sul fibrato trasverso Q, avente il campo A come campo tensoriale associato.

Dimostrazione.

Per ogni punto $p \in M$, per ogni $Z_p \in T_p(M)$ e per ogni sezione $\phi : p \to \{X_p\}$ del fibrato Q, si ponga;

$$\overset{*}{\nabla}_{Z_p} \phi = \pi(\nabla_{Z_p} X)$$

dove $\pi : T(M) \to T(M)/D$ è la surgezione canonica ed X è un campo di vettori su M tale che per ogni $q \in M$ risulta $\phi(q) = \{X_q\}$.

Si verifica facilmente che per $\overset{*}{\nabla}$ sono soddisfatte le proprietà:

1) $\overset{*}{\nabla}_{X+Y}\phi = \overset{*}{\nabla}_X\phi + \overset{*}{\nabla}_Y\phi$

2) $\overset{*}{\nabla}_X(\phi+\psi) = \overset{*}{\nabla}_X\phi + \overset{*}{\nabla}_Y \psi$

3) $\overset{*}{\nabla}_{fX}\phi = f\, \overset{*}{\nabla}_X\phi$

4) $\overset{*}{\nabla}_X(\alpha\phi) = \alpha\overset{*}{\nabla}_X\phi$

5) $\overset{*}{\nabla}_X(f\phi) = f\, \overset{*}{\nabla}_X\phi + A(X)(f)\phi$

per ogni $X,Y \in \mathfrak{D}_1(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$,$\alpha \in \mathbb{R}$, ϕ e ψ sezioni differenziabili di Q; resta allora definita una ed una sola pseudoconnessione $\overset{*}{\Gamma}$ sul fibrato Q avente A come campo tensoriale associato e rispetto alla quale $\nabla^*_{Z_p}$ è la pseudoderivata covariante di ϕ rispetto a Z_p (c.f.r.[2] pag.131), ∎

Prop. 2.2.- Se (A,∇) è una pseudoconnessione lineare trasversa su M, allora per ogni $Z \in \mathfrak{D}$ e per ogni sezione ϕ di Q risulta:

$$\overset{*}{\nabla}_Z \phi = \pi([Z,X]_A)$$

essendo $\phi(q) = \{X_q\}$ per ogni $q \in M$ e $\overset{*}{\nabla}_Z\phi$ la pseudoderivata covariante di ϕ rispetto a Z della pseudoconnessione $\overset{*}{\Gamma}$ su Q associata ad (A,∇).
$\overset{*}{\Gamma}$ si chiamerà pseudoconnessione basica (o pseudoconnessione di Bott(1)) sul fibrato trasverso Q.

Dimostrazione. -

Infatti per ogni $Z \in \mathfrak{D}_1(M)$ e per ogni sezione ϕ di Q si ha:

$$\overset{*}{\nabla}_Z\phi = \pi\,(\nabla_Z X) = \pi(\nabla_X Z - T(X,Z) - [X,Z]_A) =$$
$$= \pi(\nabla_X Z) + \pi(T(Z,X)) - \pi([X,Z]_A)$$

se $Z \in \mathfrak{D}$ essendo (A,∇) trasversa risulta $\nabla_X Z \in \mathfrak{D}$ e $T(Z,X) \in \mathfrak{D}$ e quindi $\pi(\nabla_X Z) = \pi(T(Z,X)) = 0$ da cui la tesi. ∎

Prop. 2.3. - Sia (A,∇) una pseudoconessione lineare fogliettata su M, l'applicazione di curvatura (2) R^* della pseudoconnessione $\overset{*}{\Gamma}$ associata ad (A,∇) soddisfa alla proprietà:

$$R^*(X,Y)\phi = 0$$

per ogni $X \in \mathfrak{D}$, $Y \in \mathfrak{D}_1(M)$ e per ogni sezione ϕ di Q.

$\overset{*}{\Gamma}$ si chiamerà nel seguito pseudoconnessione proiettabile (3).

---

(1) Tale denominazione è giustificata dal fatto che se A è il campo tensoriale di Kronecker, allora $\overset{*}{\nabla}$ è una connessione basica secondo Bott (c.f.r. [1]pag. 33).

(2) L'applicazione di curvatura R di una pseudoconnessione Γ su Q è definita da: $R(X,Y)\phi = \nabla_X(\nabla_Y\phi) - \nabla_Y(\nabla_X\phi) - \nabla_{[X,Y]_A}\phi$ per ogni $X,Y \in \mathfrak{D}_1(M)$ e ϕ sezione di Q; ∇ ed A sono rispettivamente la pseudoderivata covariante ed il campo tensoriale associati a Γ.

(3) Tale denominazione è giustificata dal fatto che se A è il campo tensoriale di Kronecker allora $\overset{*}{\Gamma}$ è una connessione proiettabile secondo Molino oppure basica secondo Kamber - Tondeur (c.f.r. [4]).

Dimostrazione. -

Se X ed Y sono campi di vettori su M e $\phi : q \to \{Z_q\}$ è una sezione del fibrato $Q = T(M)/D$, si ha:

$$R^*(X,Y)\phi = \overset{*}{\nabla}_X(\overset{*}{\nabla}_Y \phi) - \overset{*}{\nabla}_Y(\overset{*}{\nabla}_X\phi) - \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A}\phi =$$

$\pi(\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]_A} Z) = \pi(R(X,Y)Z)$; se $X \in \mathfrak{D}$ allora per la b") della prop. 1.3 deve risultare

$R(X,Y)Z \in \mathfrak{D}$ e quindi $\pi(R(X,Y)Z) = 0$, da cui la tesi. ∎

I risultati ora esposti, si possono invertire in quanto vale il seguente teorema:

Teorema 2.1.- <u>Ogni pseudoconnessione</u> $\overset{*}{\Gamma}$ <u>sul fibrato trasverso</u> Q <u>induce una pseudoconessione lineare su</u> M, <u>trasversa o fogliettata a seconda che</u> $\overset{*}{\Gamma}$ <u>è basica oppure proiettabile</u>.

Dimostrazione. -

Avendo supposto M paracompatta allora esiste una metrica riemanniana su M e quindi si può costruire il fibrato vettoriale $D^\perp$ (isomorfo a Q) tale che $T(M) = D \oplus D^\perp$; inoltre fissato un campo tensoriale differenziabile A di specie (1,1) su M, esiste una pseudoconnessione $\bar{\Gamma}$ sul fibrato D associata ad A (c.f.r. [2] pag. 114); premesso ciò sia $\overset{*}{\Gamma}$ una pseudoconnessione sul fibrato trasverso Q, avente A come campo tensoriale associato e siano inoltre $\bar{\nabla}$, $\overset{*}{\nabla}$ le pseudoderivate covarianti di $\bar{\Gamma}$ e $\overset{*}{\Gamma}$ rispettivamente, indicato con p l'isomorfismo tra $D^\perp$ e $Q = T(M)/D$, sia ∇ l'operatore definito da:

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y_1 + p(\nabla^*_X \phi)$$

per ogni $X, Y = Y_1 + Y_2 \in \mathfrak{D}_1(M)$ e per ogni sezione ϕ di Q tale che $\phi(q) = \{Y_q\}$ per ogni $q \in M$. La coppia (A,∇) è una pseudoconnessione lineare su M che induce $\overset{*}{\Gamma}$ su Q, in quanto essendo $\bar{\nabla}_X Y_1 \in \mathfrak{D}$ e $\pi \circ p = i_Q$ si ha:

$$\pi(\nabla_X Y) = \pi(\bar{\nabla}_X Y_1) + \pi(p(\overset{*}{\nabla}_X \phi)) = \overset{*}{\nabla}_X \phi$$

Se si fa l'ipotesi che $Y \in \mathfrak{D}$ allora $Y_2 = 0$ e quindi $\phi = 0$, da cui si ottiene: $\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y_1 \in \mathfrak{D}$.

Si supponga ora $\overset{*}{\Gamma}$ basica, allora $A(X) \in \mathfrak{D}$ se $X \in \mathfrak{D}$, inoltre se $X \in \mathfrak{D}$ e $Y \in \mathfrak{X}_1(M)$ per il campo tensoriale di torsione T di (A,∇) si ha:

$$\pi(T(X,Y)) = \pi(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]_A) =$$
$$= \pi(\nabla_X Y) - \pi([X,Y]_A) = 0$$

da cui consegue che $T(X,Y) \in \mathfrak{D}$ e quindi (A,∇) è trasversa.

Se $\overset{*}{\Gamma}$ è proiettabile allora per ogni $X \in \mathfrak{D}$ risulta $A(X) \in \mathfrak{D}$ ed inoltre per ogni $X \in \mathfrak{D}$, $Y, Z \in \mathfrak{D}_1(M)$ con ovvio significato dei simboli si ha:

$$\pi(R(X,Y)Z) = \pi(\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]_A} Z) =$$
$$= \pi(\nabla_X(\bar{\nabla}_Y Z_1) + \nabla_X\, p(\overset{*}{\nabla}_Y \phi) - \nabla_Y \bar{\nabla}_X Z_1 -$$
$$- \nabla_Y\, p(\overset{*}{\nabla}_X \phi) - \bar{\nabla}_{[X,Y]_A} Z_1 - p(\overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A} \phi\ )$$

poiché $\bar{\nabla}_Y Z_1 \in \mathfrak{D}$ risulta $\nabla_X(\bar{\nabla}_Y Z_1) \in \mathfrak{D}$ e $\nabla_Y(\bar{\nabla}_X Z_1) \in \mathfrak{D}$ e quindi la precedente uguaglianza si riduce a:

$$\pi(R(X,Y)Z) = \pi(\nabla_X(p\, \overset{*}{\nabla}_Y \phi)) - \pi(\nabla_Y(p\, \overset{*}{\nabla}_X \phi)) - \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A} \phi =$$
$$= \overset{*}{\nabla}_X(\overset{*}{\nabla}_Y \phi) - \overset{*}{\nabla}_X(\overset{*}{\nabla}_Y \phi) - \overset{*}{\nabla}_{[X,Y]_A} \phi =$$
$$= \overset{*}{R}(X,Y)Z = 0$$

da cui si conclude che $R(X,Y)Z \in \mathfrak{D}$ e quindi (A,∇) è fogliettata. ∎