n. 1 - Pseudoconnessioni fogliettate.-

In questo paragrafo si denoterà con M una varietà differenziabile $\mathcal{C}^\infty$ e dimensione n, munita di una struttura fogliettata definita da una distribuzione involutoria $\mathfrak{D}$ di dimensione costante $r < n$.

Def. 1.1.- Una pseudoconnessione lineare (A,∇) su M si dice fogliettata se soddisfa alle condizioni:

a) $A(X) \in \bar{\mathfrak{D}}_1(M)$ $\qquad \forall X \in \bar{\mathfrak{D}}_1(M)$

b) $\nabla_X Y \in \bar{\mathfrak{D}}_1(M)$ $\qquad \forall X,Y \in \bar{\mathfrak{D}}_1(M)$

essendo $\bar{\mathfrak{D}}_1(M)$ l'algebra di Lie di campi di vettori fogliettati[1] su M.

Osservazione 1.1.-

Essendo $\bar{\mathfrak{D}}_1(M)$ un'algebra di Lie, per ogni campo tensoriale differenziabile A di specie $(1,1)$ fogliettato su M e per ogni $X,Y \in \bar{\mathfrak{D}}_1(M)$, risulta $[X,Y]_A$ un campo di vettori fogliettato, essendo $[X,Y]_A$ definito da (c.f.r. [3]):

$$[X,Y]_A = [A(X),Y] - [X,A(Y)] - A([X,Y]) .$$

Dalla precedente osservazione segue subito la proposizione

Prop. 1.1.- Se (A,∇) è una pseudoconnessione lineare fogliettata su M allora il campo tensoriale T di torsione e l'applicazione di curvatura R di (A,∇) sono fogliettati.

Prop. 1.2.- Una pseudoconnessione lineare (A,∇) su M è fogliettata se e solo se indicate con A^δ_β , $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ le componenti di (A,∇) rispetto ad un sistema di coordinate adattate $(x^a, x^{\bar{a}})$, si ha:

---

(1) c.f.r. [5]

a') $A^{\bar{a}}_{b} = 0$

$\partial_a A^{\bar{a}}_{\alpha} = 0$

b') $\Gamma^{\bar{a}}_{\alpha b} = 0$

$\Gamma^{\bar{a}}_{a\beta} = 0$

$\partial_a \Gamma^{\bar{a}}_{\alpha\beta} = 0$

per ogni $a,b = 1,2,\dots,r$; $\bar{a} = r+1,\dots,n$; $\alpha,\beta = 1,2,\dots,n$.

Dimostrazione.

Per brevità ci si limita a dimostrare solo la condizione necessaria; se (A,∇) è fogliettata allora le a') seguono dalle (2.10) e (2.11) di pag. 14 c.f.r.[5]; per provare le b') si osservi che se X^{α} sono le componenti di un campo di vettori fogliettato su M, allora le combinazioni lineari del tipo:

$$X^{\alpha}_{\beta} = A^{\delta}_{\beta}\, \partial_{\delta}\, X^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\, X^{\gamma}$$

sono le componenti di un campo tensoriale fogliettato di specie (1,1) su M, rispetto ad un sistema coordinato (x^{α}) qualunque; in un sistema di coordinate adattate $(x^{a},x^{\bar{a}})$ si ha in particolare per $X = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$

$$X^{\bar{a}}_{b} = \Gamma^{\bar{a}}_{b\alpha}$$

ed essendo $X^{\bar{a}}_{b} = 0$ per la 2.10 di pag. 14 c.f.r.[5], segue che $\Gamma^{\bar{a}}_{b\alpha} = 0$.

Il campo tensoriale di torsione T di (A,∇) essendo fogliettato per la 2.17 di pag. 15 c.f.r.[5], in coordinate adattate $(x^{a};x^{\bar{a}})$, deve soddisfare alla condizione:

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^{b}} , \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \right) \in \mathfrak{D} \qquad b = 1,\dots,r \quad \alpha = 1,\dots,n$$

da questa dopo semplici calcoli si ricava:

$$\{\Gamma^{\beta}_{b\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\alpha b} - (\partial_b A^{\beta}_{\alpha} - \partial_{\alpha} A^{\beta}_{b})\}\partial_{\beta} \in \mathfrak{D}$$

da cui si ottiene: $\Gamma^{\bar{c}}_{b\alpha} - \Gamma^{\bar{c}}_{\alpha b} - \partial_b A^{\bar{c}}_{\alpha} + \partial_{\alpha} A^{\bar{c}}_{b} = 0$

essendo poi $\Gamma^{\bar{c}}_{b\alpha} = 0$ e gli ultimi due addendi nulli per la a') già dimostrata, si ha $\Gamma^{\bar{c}}_{\alpha b} = 0$.

L'ultima uguaglianza delle b') segue subito dalle (2.3) di pag. 12 c.f.r. [5]. ∎

Una caratterizzazione intrinseca delle pseudoconnessioni lineari fogliettate su M è messa in luce dalla seguente proposizione:

Prop. 1.3.- <u>Una pseudoconnessione lineare</u> (A,∇) <u>su</u> M <u>è fogliettata se e solo se indicati con</u> T <u>il campo tensoriale di torsione e con</u> R <u>l'applicazione di curvatura di</u> (A,∇) <u>risulta:</u>

a") $A(X) \in \mathfrak{D}$

$\nabla_X Y \in \mathfrak{D}$

b") $T(X,Y) \in \mathfrak{D}$

$R(X,Y)\, Z \in \mathfrak{D}$

per ogni $X \in \mathfrak{D}$ e per ogni $Y,Z \in \mathfrak{D}_1(M)$.

Dimostrazione.

Sempre per brevità ci si limita a dimostrare la condizione necessaria. Se (A,∇) è fogliettata, allora in coordinate adattate $(x^a, x^{\bar{a}})$ della prop. 1.1 segue che $A^{\bar{a}}_b = 0$ e $\Gamma^{\bar{a}}_{b\alpha} = 0$, per cui essendo $\partial_b \in \mathfrak{D}$ si ha:

$$A(\partial_b) = A_b^a \, \partial_a \in \mathcal{D} \qquad \text{e} \qquad \nabla_{\partial_b} \partial_\alpha = \Gamma_{b\alpha}^{a} \, \partial_a \in \mathcal{D}$$

da queste seguono immediatamente le a").

Per provare le b") basta tener presente che T ed R essendo fogliettati soddisfano alla (2.17) di pag. 15 c.f.r. [5]. ■

Def. 1.2. - <u>Una pseudoconnessione lineare</u> (A,∇) <u>su</u> M <u>si dice trasversa alla fogliazione se soddisfa alle condizioni:</u>

$$A(X) \in \mathcal{D}$$
$$\nabla_Y X \in \mathcal{D}$$
$$T(X,Y) \in \mathcal{D}$$

<u>per ogni</u> $X \in \mathcal{D}$ <u>e per ogni</u> $Y \in \mathcal{D}_1(M)$.

<u>Osservazione</u> 1.2.-

Se (A,∇) e (A,∇') sono pseudoconnessioni lineari trasverse su M, allora il tensore S definito da

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla'_X Y \qquad \forall X,Y \in \mathcal{D}_1(M)$$

soddisfa alla proprietà:

"$S(X,Y) \in \mathcal{D}$ se X oppure Y appartiene a $\mathcal{D}$".

Viceversa se (A, ∇') è una pseudoconnessione lineare trasversa ed (A,∇) è una pseudoconnessione lineare su M tale che il tensore S soddisfa alla proprietà $S(X,Y) \in \mathcal{D}$ se X oppure Y appartiene a $\mathcal{D}$, allora anche (A,∇) è trasversa; infatti con ovvio significato dei simboli, sottraendo membro a membro le due uguaglianze:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]_A$$
$$T'(X,Y) = \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X,Y]_A$$

si ottiene:

$$T(X,Y) = T'(X,Y) - S(X,Y) - \nabla_Y X + \nabla'_Y X$$

allora se $X \in \mathfrak{D}$ per ipotesi deve aversi $T'(X,Y) \in \mathfrak{D}$, $\nabla'_Y X \in \mathfrak{D}$, inoltre essendo $\nabla_Y X = \nabla'_Y X + S(Y,X)$, risulta ovviamente anche $\nabla_Y X \in \mathfrak{D}$; si conclude allora che $T(X,Y) \in \mathfrak{D}$ per ogni $X \in \mathfrak{R}$ quindi (A,∇) è trasversa.

Def. 1.3.- *Una pseudoconnessione lineare* (A,∇) *su* M *si dice che conserva parallela la distribuzione* $\mathfrak{D}$ *se soddisfa alle condizioni:*

$$A(X) \in \mathfrak{D}$$
$$\nabla_Y X \in \mathfrak{D}$$

per ogni $X \in \mathfrak{D}$ *e per ogni* $Y \in \mathfrak{D}_1(M)$.

Ovviamente ogni pseudoconnessione lineare fogliettata è anche trasversa e ogni pseudoconnessione lineare trasversa conserva la distribuzione $\mathfrak{D}$ parallela, ma non viceversa.

n.2. - *Pseudoconnessioni sul fibrato trasverso.*

In questo paragrafo si denoterà con M una varietà differenziabile paracompatta fogliettata, con fogliazione definita da una distribuzione involutoria $\mathfrak{D}$ di dimensione r; la distribuzione $\mathfrak{D}$ individua un sottofibrato D del fibrato tangente TM, di dimensione r, essendo la fibra sopra $x \in M$ il sottospazio $\mathfrak{D}_x$ dello spazio tangente $T_x(M)$, il fibrato $Q = T(M)/D$ è il fibrato trasverso al fogliettamento; ogni punto di Q è una classe di equivalenza $\{X_x\}$ dove $X_x \in T_x(M)$, e due vettori X_x e Y_x di $T_x(M)$ appartengono alla stessa classe di equivalenza se la loro differenza $X_x - Y_x$ appartiene al sottospazio $\mathfrak{D}_x$.