per ogni $X,Y \in \mathcal{X}$ e $\omega \in \mathcal{T}_1^0$ e dove ∇ è la derivazione covariante rispetto ad una connessione lineare ed A e S sono due qualsiasi campi tensoriali di specie (2,3) e (1,3) rispettivamente.

Sia Γ^2 una connessione del secondo ordine di specie (0,1) definita da (C,D) e sia $\omega \in \mathcal{T}_1^0$ avente componenti ω_i in una carta locale (U,ϕ) di V_n, allora le componenti del campo di tensori tripli covarianti $D^2\omega$ nella stessa carta sono le (1.1.).

In particolare se $f \in \mathcal{F}$ le componenti in (U,ϕ) di $D^2(df)$ sono:

(1.12) $$\partial_{ijh} f + C^{pq}_{ij,h}\, \partial_{pq} f + D^p_{ij,h}\, \partial_p f \,.$$

Per ogni $f \in \mathcal{F}$ il campo di tensori $\delta^3 f = D^2(df)$ si chiama differenziale covariante terzo di f rispetto a Γ^2 e l'operatore

$$\delta^3 = D^2 \circ d : f \to \delta^3 f$$

si chiama differenziazione covariante terza rispetto a Γ^2.

Si osservi che se Γ^2 è dedotta da una connessione lineare Γ, tenendo presenti le (1.9) e (1.10) segue che l'operatore δ^3 coincide con l'operatore Δ^3 di derivazione covariante terza rispetto a Γ studiato in [11].

2. SPAZI DI COOMOLOGIA ASSOCIATI A Γ^2. -

L'operatore δ^3 di differenziazione covariate terza dispetto ad una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie (0,1) è un omomorfismo (rispetto alle strutture di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{T}_3^0$) e quindi $\delta^3(\mathcal{F})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{T}_3^0$. Un campo di tensori ω appartenente a $\delta^3(\mathcal{F})$ si chiamerà esatto rispetto a δ^3.

Da (1.12) segue che $\omega \in \overset{o}{\underset{3}{}}$ è esatto rispetto a δ^3 se e solo se esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che, qualunque sia la carta locale (U,ϕ) di V_n rispetto alla quale ω abbia componenti ω_{ijh}, risulti:

$$(2.1) \qquad \omega_{ijh} = \partial_{ijh} f + C^{pq}_{ij,h}\, \partial_{pq} f + D^{p}_{ij,h}\, \partial_p f \, .$$

Un campo di tensori $\omega \in \overset{o}{\underset{3}{}}$ si dirà invece chiuso rispetto a δ^3 se è localmente esatto, cioè se per ogni $p \in V_n$ esiste una carta locale (U,ϕ) di V_n con $p \in U$ ed esiste una funzione f differenziabile in U legata alle componenti ω_{ijh} di ω in (U,ϕ) dalla relazione (2.1).

Indicati con $E^3_{\Gamma^2}$ e $C^3_{\Gamma^2}$ gli insiemi dei campi di tensori differenziabili tripli covarianti rispettivamente esatti e chiusi rispetto a δ^3, $E^3_{\Gamma^2} = \delta^3(\mathcal{F})$ è un sottospazio di $\overset{o}{\underset{3}{}}$; inoltre è facile provare che anche $C^3_{\Gamma^2}$ è un sottospazio di $\overset{o}{\underset{3}{}}$ e poiché ogni campo di tensori esatto rispetto a δ^3 è anche chiuso rispetto a δ^3, $E^3_{\Gamma^2}$ è un sotto spazio di $C^3_{\Gamma^2}$

DEF. 1. - Lo spazio vettoriale quoziente

$$H^3_{\Gamma^2} = C^3_{\Gamma^2} / E^3_{\Gamma^2}$$

si chiama spazio di coomologia di V_n rispetto a Γ^2 dei campi di tensori differenziabili tripli covarianti.

Allo scopo di studiare lo spazio di coomologia $H^3_{\Gamma^2}$ definito precedentemente, si consideri il fascio di funzioni su V_n che si ottiene associando ad ogni aperto A di V_n lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ $\mathcal{P}_A$ delle funzioni f_A differenziabili in A tali che

$$\delta^3 f_A = 0 \qquad \text{in } A,$$

e associando ad ogni coppia di aperti A e B di V_n tali che $A \supseteq B$

l'omomorfismo di restrizione $i_B^A : f_A \in \mathcal{P}_A \to f_{A|B} \in \mathcal{P}_B$.

Tale fascio si chiamerà fascio delle funzioni a differenziale covariante terzo rispetto a Γ^2 nullo e lo si indicherà con $\mathcal{P}_{\Gamma^2}(V_n, {}_A, i_B^A)$ o semplicemente con $\mathcal{P}_{\Gamma^2}$.

Si premetteranno ora alcune necessarie notazioni e brevi richiami della teoria dei fasci che saranno utili in seguito.

Se $U = (U_i)_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto proprio di V_n si indicherà con:

$\mathcal{P}^0_{\Gamma^2}(U)$ lo spazio vettoriale delle 0-cocatene relative ad U e a coefficienti in $\mathcal{P}_{\Gamma^2}$;

$Z^1_{\Gamma^2}(U)$ lo spazio vettoriale degli 1-cocicli relativi ad U e a coefficienti in $\mathcal{P}_{\Gamma^2}$;

∂ l'omomorfismo di cobordo e con $E^1_{\Gamma^2}(U) = \partial \mathcal{P}^0_{\Gamma^2}(U)$ lo spazio vettoriale dei cobordi sottospazio di $Z^1_{\Gamma^2}(U)$;

$\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U) = Z^1_{\Gamma^2}(U)/\partial \mathcal{P}^0_{\Gamma^2}(U)$ lo spazio di coomologia 1-dimensionale relativo ad U e a valori in $\mathcal{P}_{\Gamma^2}$.

Indicato ora con $\mathcal{U}$ l'insieme preordinato e filtrante dei ricoprimenti aperti propri di V_n, se $U, U' \in \mathcal{U}$ U' è un raffinamento di U ($U \geq U'$) con applicazione di raffinamento t, si indica con $T^U_{U'}$ l'omomorfismo (che risulta indipendente da t) che ad ogni $[p^1_U] \in {}^{1}_{\Gamma^2}(U)$ associa $[T^U_{U'}(p^1_U)] \in \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U')$. Tali omomorfismi hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} T^U_U = \text{identità} & \forall U \in \mathcal{U} \\ T^{U'}_{U''} \circ T^U_{U'} = T^U_{U''} & U \geq U' \geq U'' \end{cases}$$

quindi $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U), T^U_{U'}\}$ è un sistema diretto di spazi vettoriali. Il limite induttivo di tale sistema diretto si indica con $\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$ e si chiama spazio di coomologia 1-dimensionale di V_n a coefficienti in $\mathcal{P}_{\Gamma^2}$.

Infine, denotato con

$$T^U : \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U) \to \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$$

l'omomorfismo canonico, valgono le seguenti proprietà:

$$(2.2)\quad \begin{cases} T^{U'} \circ T^U_{U'} = T^U & \forall U,U' \in \mathcal{U} \ \ni' \ U \geq U' ; \\ T^U([p^1_U]) = T^{\bar U}([p^1_{\bar U}]) \Longleftrightarrow & \exists U' \in \mathcal{U} \ \ni' \ U \geq U',\ \bar U \geq U' \\ & \text{e } T^U_{U'}([p^1_U]) = T^{\bar U}_{U'}([p^1_{\bar U}]) \\ \bigcup_{U \in \mathcal{U}} T^U \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U)) = \mathcal{H}^1_{\Gamma^2} . \end{cases}$$

Si dimostrerà la seguente :

Proposizione 1. - <u>Lo spazio $H^3_{\Gamma^2}$ di coomologia di V_n rispetto a</u> <u>dei campi di tensori differenziabili tripli covarianti è isomorfo allo spazio $\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$ di coomologia 1-dimensionale di V_n delle funzioni a differenziale covariante terzo rispetto a Γ^2 nullo.</u>

Dimostrazione. - Se $\omega \in C^3_{\Gamma^2}$, esiste un ricoprimento aperto proprio di V_n $U = (U_i)_{i\in I}$ ed esiste una famiglia di funzioni $f_U = (f_i)_{i\in I}$ con f_i differenziabile in U_i tale che

$$(2.3) \qquad \forall i \in I \quad \delta^3 f_i = \omega_{|U_i} .$$

Indicato con $I^2_* = \{(i,j) \in I^2 | U_i \cap U_j \neq \emptyset\}$ si ponga:

$$(2.4) \qquad \forall (i,j) \in I^2 \quad f_{ij} = f_i - f_j .$$

Per la (2.3) e (2.4) risulta:

a) $\forall (i,j) \in I^2_* \quad \delta^3 f_{ij} = 0 \quad ; \quad \forall (i,j) \in I^2_* ;$

b) $f^1_U = \{f_{ij}\}_{(i,j)\in I^2_*} \in Z^1_{\Gamma^2}(U)$.

Poiché si prova facilmente che la classe $f^1 = T^U([f^1_U]) \in \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$ non varia al variare del ricoprimento U e della famiglia f_U, si è costruita un'applicazione, che risulta un $\mathbb{R}$-omomorfismo:

$$\phi \; : \omega \in C^3_{\Gamma^2} \to f^1 \in \mathcal{H}^1_{\Gamma^2} .$$

Risulta $\ker \phi = E^3_{\Gamma^2}$ e quindi, per il teorema fondamentale sugli omomorfismi tra spazi vettoriali, dall'omomorfismo ϕ si ottiene il monomorfismo

$$\Phi : [\omega] \in C^3_{\Gamma^2}/\mathrm{Ker}\phi = H^3_{\Gamma^2} \to f^1 \in \mathcal{H}^1_{\Gamma^2} .$$

Si proverà ora che Φ è surgettiva e quindi la proposizione sarà completamente dimostrata.

Sia $p^1 \in \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$, allora esisterà (per l'ultima delle relazioni (2.2)) un ricoprimento aperto proprio $U = (U_i)_{i\in I}$ tale che $p^1 \in T^U(\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U))$ e sia $[p^1_U]$, con $p^1_U = \{p_{ij}\}_{(i,j)\in I^2_*} \in Z^1_{\Gamma^2}(U)$, un qualsiasi elemento di $(T^U)^{-1}(p^1)$.

Si consideri ora una partizione dell'unità di V_n $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ relativa al ricoprimento U e sia $h : m \in \mathbb{N}^+ \to h(m) \in I$ un'applicazione di raffinamento relativa ad U e a $\{\mathrm{supp}\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ tale che $\forall m \in \mathbb{N}^+$ $\mathrm{supp}\,\phi_m \subseteq U_{h(m)}$.

Per ogni $i \in I$ e per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ si consideri la funzione f_{im} definita in U_i nel seguente modo:

$$(2.5) \qquad f_{im} = \begin{cases} 0 & \text{in } U_i - U_{h(m)} \\ p_{ih(m)}\phi_m & \text{in } U_i \cap U_{h(m)} \end{cases} ;$$

f_{im} è differenziabile in U_i, essendo ivi localmente differenziabile.

Per (2.5) risulta $\operatorname{supp} f_{im} \subseteq \operatorname{supp} \phi_m$, ed essendo $\{\operatorname{supp}\phi_m\}_{m\in N^+}$ un ricoprimento localmente finito di V_n, $\{\operatorname{supp} f_{im}\}_{m\in N}$ è un ricoprimento localmente finito di U_i. Ne segue che per ogni $p \in U_i$ esiste un intorno aperto U_p di p ed esiste un sottoinsieme finito $N_p \neq \emptyset$ di $\mathbb{N}$ tali che in U_p si abbia:

$$\sum_{m\in N^+} f_{im} = \sum_{m\in N_p} f_{im} .$$

Allora per ogni $i \in I$ la funzione f_i definita in U_i nel seguente modo

$$f_i = \sum_{m\in N^+} f_{im}$$

è differenziabile in U_i essendolo ivi localmente.

In questo modo si è ottenuta la famiglia di funzioni $f_U = \{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ relativa al ricoprimento U per la quale risulta per (2.5):

$$\forall (ij)\in I^2_* \qquad f_{im} - f_{jm} = (p_{ih(m)} - p_{jh(m)})\phi_m \qquad \text{in } U_i \cap U_j \cap U_{h(m)}$$

ed essendo

$$f_{im} = f_{jm} = \phi_m = 0 \qquad \text{in } U_i \cap U_j \cap U_{h(m)}$$

risulta:

$$f_{im} - f_{jm} = p_{ij}\,\phi_m \qquad \text{in} \quad U_i \cap U_j \neq \emptyset .$$

Per cui, sommando per m variabile in N^+ ed essendo $\sum_{m\in N^+}\phi_m = 1$ si ha:

$$f_i - f_j = p_{ij} \qquad \forall (i,j) \in I^2_* , \tag{2.6}$$

cioé l'1-cociclo determinato dalla famiglia $f_U = (f_i)_{i\in I}$ coincide con l'1-cociclo p^1_U. Essendo inoltre $\delta^3 p_{ij} = 0$, da (2.6) segue che:

$$\delta^3 f_i = \delta^3 f_j \qquad \forall (ij)\in I^2_* .$$

Ponendo allora per ogni $i \in I$ $\omega|_{U_i} = \delta^3 f_i$, risulta che il campo di tensori $\omega \in \mathcal{T}^0_3$ così definito, **è chiuso rispetto** a δ^3 e la famiglia di funzioni f_U è ad esso associata. Poiché l'1-cociclo f^1_U determinato da f_U coincide con l'1-cociclo p^1_U, si ha:

$$f^1 = T^U(f^1_U) = T^U p^1_U) = p^1$$

e quindi $$\Phi([\omega]) = \phi(\omega) = f^1 = p^1$$

cioé Φ è surgettiva e quindi la proposizione è completamente provata.