1. CONNESSIONI DEL SECONDO ORDINE DI SPECIE (0,1).

E. Bompiani ha definito in [2] una connessione del secondo ordine assegnando su ogni carta locale (U,ϕ) di V_n due famiglie di funzioni $(C^{pq}_{ij,h}\,,\ D^{p}_{ij,h})$ tali che in ogni intersezione non vuota dei domini di due carte locali siano soddisfatte certe relazioni ((C) e (D) in [2]) che assicurano carattere tensoriale alle combinazioni del tipo

$$\partial_{ij}\,\xi^p + C^{pq}_{ij,h}\,\partial_q\,\xi^h + D^{p}_{ij,h}\,\xi^h$$

dove le ξ^p sono le componenti in (U,ϕ) di un campo di vettori controvarianti.

Successivamente C. Di Comite ha provato in [5] che ogni connessione del secondo ordine può essere determinata globalmente su V_n da una coppia di operatori $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, definiti in $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ e a valori rispettivamente in $\mathcal{T}^2_0$ e in $\mathcal{X}$, soddisfacenti a certi assiomi.

Considerazioni analoghe a quelle di Bompiani possono farsi assegnando su ogni carta locale (U,ϕ) di V_n due famiglie di funzioni $(C^{pq}_{ij,h}, D^{p}_{ij,h})$ in modo tale che abbiano carattere tensoriale le combinazioni seguenti

$$\partial_{ij}\,\omega_h + C^{pq}_{ij,h}\,\partial_q\,\omega_p + D^{p}_{ij,h}\,\omega_p \tag{1.1}$$

dove le ω_p sono le componenti in (U,ϕ) di una 1-forma differenziale.

E' facile verificare che le combinazioni (1.1) **sono** le componenti di un campo di tensori di specie (0,3) se valgono le seguenti relazioni:

$$C^{p'q'}_{i'j',h'} = C^{pq}_{ij,h}\,\theta^i_{i'}\theta^j_{j'}\theta^h_{h'}\theta^{p'}_{p}\,\theta^{q'}_{q} - \delta^{q'}_{j'}\theta^{p}_{i'h'}\theta^{p'}_{p} - \delta^{q'}_{i'}\,\theta^{p}_{j'h'}\,\theta^{p'}_{p} - \delta^{p'}_{h'}\theta^{q}_{i'j'}\theta^{q'}_{q} \tag{1.2}$$

$$D^{p'}_{i'j',h'} = D^{p}_{ij,h}\,\theta^i_{i'}\theta^j_{j'}\,\theta^h_{h'}\theta^{p'}_{p} - C^{l'q'}_{i'j',h'}\theta^{p}_{l'q'}\theta^{p'}_{p} - \theta^{p}_{i'j'h'}\theta^{p'}_{p} \tag{1.3}$$

in cui si sono indicate con $C^{p'q'}_{i'j',h'}$ e $D^{p'}_{i'j',h'}$ le funzioni definite nella carta locale (U',ϕ') come dianzi, si è supposto $U\cap U'\neq\emptyset$ e dove, se $\phi=(x^1,..x^n)$ e $\phi'=(x^{1'},\dots,x^{n'})$ si è posto $\theta^i_{i'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, $\theta^i_{i'j'} = \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}$, ecc.

DEF. 1 - L'ente geometrico avente per componenti in (U,ϕ) le funzioni $C^{qp}_{ij,q}$ e $D^p_{ij,h}$ sarà chiamato <u>connessione del secondo ordine di specie</u> (0,1); l'ente geometrico avente per componenti soltanto le funzioni $C^{pq}_{ij,h}$ si chiamerà C-<u>connessione di specie</u> (0,1).

Si mostrerà ora che le connessioni del secondo ordine di specie (0,1), così come ha provato C.Di Comite in [5] per le connessioni del secondo ordine, possono essere definite globalmente su V_n.

DEF. 2. - Sia $\mathcal{C}: (X,Y) \to \mathcal{C}_{X,Y}$ una applicazione $\mathbb{R}$-lineare di $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ nello spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle applicazioni $\mathbb{R}$-lineari di $\mathcal{T}^0_1$ in $\mathcal{T}^1_1$ soddisfacente ai seguenti assiomi:

$$(C_1) \qquad \mathcal{C}_{fX,Y}\omega = f\mathcal{C}_{X,Y}\omega - Y(f)X \otimes \omega$$

$$(C_2) \qquad \mathcal{C}_{X,fY}\omega = f\mathcal{C}_{X,Y}\omega$$

$$(C_3) \qquad \mathcal{C}_{X,Y}f\omega = f\mathcal{C}_{X,Y}\omega + X(f)\, Y \otimes \omega + Y(f)X \otimes \omega$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$, per ogni $X,Y \in \mathcal{X}$ e per ogni $\omega \in \mathcal{T}^0_1$.

Sia inoltre $\mathcal{D}: (X,Y) \to \mathcal{D}_{X,Y}$ un'applicazione $\mathcal{F}$-bilineare di $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ nell'$\mathcal{F}$-modulo degli endomorfismi di $\mathcal{T}^0_1$ soddisfacente al seguente assioma:

$$(D) \qquad \mathcal{D}_{X,Y}\, f\omega = f\mathcal{D}_{X,Y}\,\omega + C^1_1(df \otimes \mathcal{C}_{X,Y}\,\omega) + Y(X(f))\omega$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$, per ogni $X,Y \in \mathcal{X}$, per ogni $\omega \in \mathcal{T}^0_1$

e dove si è indicato con C^1_1 la contrazione del primo indice di controvarianza col primo indice di covarianza.

Si dice allora che la coppia di operatori $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ definisce su V_n una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie $(0,1)$ e che l'operatore $\mathcal{C}$ definisce su V_n una C-connessione di specie $(0,1)$.

Per ogni $\omega \in \mathcal{T}^0_1$, il campo tensoriale $D^2\omega \in \mathcal{T}^0_3$ così definito

$$(1.4) \qquad D^2\omega : (X,Y) \in x \rightarrow \mathcal{D}_{X,Y}\omega \in \mathcal{T}^0_1$$

si chiama differenziale covariante secondo di ω rispetto a Γ^2 e l'applicazione

$$D^2 : \omega \rightarrow D^2\omega$$

si chiama differenziazione covariante del secondo ordine rispetto a Γ^2.

Come per le connessioni del secondo ordine (cfr. [5]) sussiste la seguente:

Prop. 1 - Se ∇ è la derivazione covariante rispetto ad una connessione lineare Γ su V_n, gli operatori $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ definiti per ogni $(X,Y) \in x$ e per ogni $\omega \in \mathcal{T}^0_1$ nel modo seguente:

$$(1.5) \qquad \mathcal{C}_{X,Y}\,\omega = X \otimes \nabla_Y\omega + Y \otimes \nabla_X\omega - (\nabla_Y X) \otimes \omega$$

$$(1.6) \qquad \mathcal{D}_{X,Y}\,\omega = \nabla_Y(\nabla_X\omega) - \nabla_{\nabla_Y X}\omega$$

determinano su V_n una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie $(0,1)$ tale che la differenziazione covariante D^2 rispetto a Γ^2 coincide con l'ordinaria differenziazione covariante ∇^2 del secondo ordine rispetto a Γ

La connessione del secondo ordine di specie $(0,1)$ definita dalla proposizione precedente secondo le (1.5) e (1.6) si chiama dedotta dalla connessione lineare Γ.

Se Γ^2 è una connessione del secondo ordine di specie $(0,1)$ definita da $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, é facile verificare che essa induce su ogni sottovarietà aperta U di V_n una connessione Γ^2_U dello stesso tipo.

Se (U, ϕ) é una carta locale di V_n con $\phi = (x^1,\dots,x^n)$, posto per ogni $i = 1,\dots n$ $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = e_i$ e $dx^j = e^j$, le funzioni $C^{pq}_{ij,h}$ e $D^p_{ij,h}$ definite su U da:

$$(1.7) \qquad (\mathcal{C}_U)_{e_i,e_j}\, e^p = C^{pq}_{ij,h}\, e_q \otimes e^h$$

$$(1.8) \qquad (\mathcal{D}_U)_{e_i,e_j}\, e^p = D^p_{ij,h}\, e^h$$

si chiamano <u>componenti</u> di Γ^2 nella carta (U,ϕ).

Indicate con $C^{p'q'}_{i'j',h'}$ e $D^{p'}_{i'j',h'}$ le componenti di Γ^2 in un'altra carta locale (U',ϕ') tale cge $U \cap U' \neq \emptyset$, si verifica facilmente che sussistono le (1.2) e (1.3) dette <u>formule di trasformazione delle componenti</u> di Γ^2.

Viceversa se su ogni carta locale (U,ϕ) di V_n vengono assegnate due famiglie di funzioni $C^{pq}_{ij,h}$ e $D^p_{ij,h}$ verificanti le (1.2) e (1.3) in ogni intersezione non vuota di due domini di tali carte, si può definire, mediante le (1.7) e (1.8), una coppia di operatori $(\mathcal{C}_U, \mathcal{D}_U)$ che determina su U una connessione del secondo ordine di specie (0,1) Γ^2_U . Si definisce infine su V_n un'unica connessione del secondo ordine di specie (0,1) determinata dalla coppia di operatori $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ tale che, se $p \in V_n$ e (U,ϕ) é una carta locale con $p \in U$, risulti:

$$(\mathcal{C}_{X,Y}\omega)_p = ((\mathcal{C}_U)_{X_{|U},Y_{|U}}\, \omega_{|U})_p \;, \quad (\mathcal{D}_{X,Y}\omega)_p = ((\mathcal{D}_U)_{X_{|U},Y_{|U}}\, \omega_{|U})_p$$

per ogni $X,Y \in \mathcal{X}$ e per ogni $\omega \in \mathcal{T}^0_1$.

Ne segue che la DEF. 1 di connessione del secondo ordine di specie (0,1) è equivalente alla DEF.2 .

Si osservi che se Γ^2 è una connessione del secondo ordine di specie (0,1) dedotta da una connessione lineare di componenti Γ^h_{ij}, allora le componenti di Γ^2 sono, come segue facilmente da (1.5) e (1.6):

$$(1.9) \qquad C^{pq}_{ij,h} = -\delta^q_i \, \Gamma^p_{jh} - \delta^q_j \, \Gamma^p_{ih} - \delta^p_h \, \Gamma^q_{ji}$$

$$(1.10) \qquad D^p_{ij,h} = -\partial_j \Gamma^p_{ih} + \Gamma^p_{ik} \Gamma^k_{jh} + \Gamma^k_{ji} \Gamma^p_{kh} \, .$$

Come in [5] sussistono le seguenti due proposizioni:

PROP. 2 - <u>Se $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ è una coppia di operatori che determina su V_n una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie (0,1) allora la coppia di operatori $(\mathcal{C}',\mathcal{D}')$ definita da</u> :

$$\mathcal{C}'_{X,Y}\,\omega = \frac{1}{2}\left(\mathcal{C}_{X,Y}\,\omega + \mathcal{C}_{Y,X}\,\omega + [X,Y]\otimes\omega\right) \qquad \forall\, X,Y \in \mathcal{X}$$

$$\mathcal{D}'_{X,Y}\,\omega = \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_{X,Y}\,\omega + \mathcal{D}_{Y,X}\,\omega\right) \qquad \forall\, \omega \in \mathcal{T}^0_1$$

<u>determina su V_n una connessione Γ'^2 del secondo ordine di specie</u> (0,1). <u>Se</u> $(C^{pq}_{ij,h}, D^p_{ij,h})$ <u>sono le componenti di Γ^2 in una carta locale</u> (U,ϕ), <u>allora le componenti di Γ'^2 nella stessa carta sono</u> $(C^{pq}_{(ij),h}, D^p_{(ij),h})$.

PROP. 3. - <u>La più generale connessione del secondo ordine di specie</u> (0,1) <u>è determinata dalla coppia di operatori $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ tali che</u>:

$$\mathcal{C}_{X,Y}\,\omega = X\otimes\nabla_Y\,\omega + Y\otimes\nabla_X\omega - (\nabla_Y X)\otimes\omega + A(X,Y,\omega)$$

$$\mathcal{D}_{X,Y}\,\omega = \nabla_Y\nabla_X\omega - \nabla_{\nabla_Y X}\,\omega + (C^{12}_{45}(A\otimes\nabla\omega))(X,Y) + S(X,Y,\omega)$$

per ogni $X,Y \in \mathcal{X}$ e $\omega \in \mathcal{T}_1^0$ e dove ∇ è la derivazione covariante rispetto ad una connessione lineare ed A e S sono due qualsiasi campi tensoriali di specie (2,3) e (1,3) rispettivamente.

Sia Γ^2 una connessione del secondo ordine di specie (0,1) definita da (C,D) e sia $\omega \in \mathcal{T}_1^0$ avente componenti ω_i in una carta locale (U,ϕ) di V_n, allora le componenti del campo di tensori tripli covarianti $D^2\omega$ nella stessa carta sono le (1.1.).

In particolare se $f \in \mathcal{F}$ le componenti in (U,ϕ) di $D^2(df)$ sono:

(1.12) $$\partial_{ijh} f + C^{pq}_{ij,h}\, \partial_{pq} f + D^p_{ij,h}\, \partial_p f .$$

Per ogni $f \in \mathcal{F}$ il campo di tensori $\delta^3 f = D^2(df)$ si chiama differenziale covariante terzo di f rispetto a Γ^2 e l'operatore

$$\delta^3 = D^2 \circ d : f \to \delta^3 f$$

si chiama differenziazione covariante terza rispetto a Γ^2.

Si osservi che se Γ^2 è dedotta da una connessione lineare Γ, tenendo presenti le (1.9) e (1.10) segue che l'operatore δ^3 coincide con l'operatore Δ^3 di derivazione covariante terza rispetto a Γ studiato in [11].

2. SPAZI DI COOMOLOGIA ASSOCIATI A Γ^2. -

L'operatore δ^3 di differenziazione covariate terza dispetto ad una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie (0,1) è un omomorfismo (rispetto alle strutture di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{T}_3^0$) e quindi $\delta^3(\mathcal{F})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{T}_3^0$. Un campo di tensori ω appar-