INTRODUZIONE. -

Sia V_n una varietà differenziabile reale n-dimensionale di classe C^∞, $\mathcal{F}$ l'algebra delle funzioni differenziabili su V_n, $\mathcal{X}$ l'$\mathcal{F}$-modulo dei campi di vettori controvarianti differenziabili su V_n, $\mathcal{T}^r_s$ $(r=0,1,\ldots;$ $s = 0,1\ldots)$ l'$\mathcal{F}$-modulo dei campi di tensori differenziabili di specie (r,s) su V_n $(\mathcal{T}^0_0 = \mathcal{F}, \mathcal{T}^1_0 = \mathcal{X})$.

E' nota l'importanza, nello studio di V_n, dello spazio di coomologia di De Rham q-dimensionale $(1 \leq q \leq n)$ H^q delle q-forme differenziali; esso è isomorfo allo spazio di coomologia di Čech q-dimensionale $\mathcal{H}^q$ a coefficienti reali ed è un invariante topologico di V_n.

Recentemente ([1],[10],[11]) sono stati studiati diversi spazi di coomologia associati ad una connessione lineare su V_n. Si è provato che alcuni di tali spazi risultano isomorfi allo spazio di coomologia 1-dimensionale H^1 di De Rham e quindi sono invarianti topologici di V_n, mentre altri risultano invarianti di V_n dipendenti dalla connessione assegnata.

Appare naturale allora chiedersi cosa succede su una V_n munita di un altro tipo di connessione.

Nel n.1 di tale lavoro, assegnata su V_n in due modi equivalenti una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie $(0,1)$, si introduce un operatore $\delta^3 : \mathcal{F} \to \mathcal{T}^0_3$ di differenziazione covariante terza rispetto a Γ^2.

Indi (n.2), data in modo naturale la nozione di campo di tensori tripli covarianti <u>esatto</u> o <u>chiuso</u> rispetto a δ^3, si definisce lo spazio $H^3_{\Gamma^2}$ di coomologia rispetto a Γ^2 dei campi di tensori tripli covarianti e si dimostra che esso è isomorfo allo spazio di coomologia 1-dimensionale $\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$ a coefficienti nel fascio delle funzioni a differenziale covariante terzo rispetto a Γ^2 nullo.

Nel n.3 si forniscono alcuni esempi significativi.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

Nel n.4 infine, considerata su V_n una pseudoconnessione lineare Γ e definito un operatore di differenziazione covariante q-esima $\delta^q : \mathcal{F} \to \mathcal{T}^0_q$ $(\forall q \geq 1)$, si determina una successione di spazi di coomologia $\{H^q_\Gamma\}_{q\in\mathbb{N}^+}$ associati a Γ. Il primo elemento H^1_Γ di tale successione coincide con lo spazio di coomologia 1-dimensionale H^1 di De Rham e, per ogni $q \geq 1$, H^q_Γ è isomorfo allo spazio di coomologia 1-dimensionale a coefficienti nel fascio delle funzioni a differenziale covariante q-esimo δ^q nullo.

1. CONNESSIONI DEL SECONDO ORDINE DI SPECIE (0,1).

E. Bompiani ha definito in [2] una connessione del secondo ordine assegnando su ogni carta locale (U,ϕ) di V_n due famiglie di funzioni $(C^{pq}_{ij,h}\, ,\, D^{p}_{ij,h})$ tali che in ogni intersezione non vuota dei domini di due carte locali siano soddisfatte certe relazioni ((C) e (D) in [2]) che assicurano carattere tensoriale alle combinazioni del tipo

$$\partial_{ij}\, \xi^{p} + C^{pq}_{ij,h}\, \partial_{q}\, \xi^{h} + D^{p}_{ij,h}\, \xi^{h}$$

dove le ξ^{p} sono le componenti in (U,ϕ) di un campo di vettori controvarianti.

Successivamente C. Di Comite ha provato in [5] che ogni connessione del secondo ordine può essere determinata globalmente su V_n da una coppia di operatori $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, definiti in $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ e a valori rispettivamente in $\mathcal{T}^{2}_{0}$ e in $\mathcal{X}$, soddisfacenti a certi assiomi.

Considerazioni analoghe a quelle di Bompiani possono farsi assegnando su ogni carta locale (U,ϕ) di V_n due famiglie di funzioni $(C^{pq}_{ij,h}, D^{p}_{ij,h})$ in modo tale che abbiano carattere tensoriale le combinazioni seguenti

$$\partial_{ij}\, \omega_{h} + C^{pq}_{ij,h}\, \partial_{q}\, \omega_{p} + D^{p}_{ij,h}\, \omega_{p} \tag{1.1}$$

dove le ω_{p} sono le componenti in (U,ϕ) di una 1-forma differenziale.

E' facile verificare che le combinazioni (1.1) **sono** le componenti di un campo di tensori di specie (0,3) se valgono le seguenti relazioni:

$$C^{p'q'}_{i'j',h'} = C^{pq}_{ij,h}\, \theta^{i}_{i'}\theta^{j}_{j'}\theta^{h}_{h'}\theta^{p'}_{p}\, \theta^{q'}_{q} - \delta^{q'}_{j'}\theta^{p}_{i'h'}\theta^{p'}_{p} - \delta^{q'}_{i'}\, \theta^{p}_{j'h'}\, \theta^{p'}_{p} - \delta^{p'}_{h'}\theta^{q}_{i'j'}\theta^{q'}_{q} \tag{1.2}$$

$$D^{p'}_{i'j',h'} = D^{p}_{ij,h}\, \theta^{i}_{i'}\theta^{j}_{j'}\, \theta^{h}_{h'}\theta^{p'}_{p} - C^{l'q'}_{i'j',h'}\theta^{p}_{l'q'}\theta^{p'}_{p} - \theta^{p}_{i'j'h'}\theta^{p'}_{p} \tag{1.3}$$

in cui si sono indicate con $C^{p'q'}_{i'j',h'}$ e $D^{p'}_{i'j',h'}$ le funzioni definite nella carta locale (U',ϕ') come dianzi, si è supposto $U\cap U'\neq\emptyset$ e dove, se $\phi=(x^1,..x^n)$ e $\phi'=(x^{1'},\dots,x^{n'})$ si è posto $\theta^i_{i'}=\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, $\theta^i_{i'j'}=\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}$ ecc.

DEF. 1 - L'ente geometrico avente per componenti in (U,ϕ) le funzioni $C^{qp}_{ij,q}$ e $D^p_{ij,h}$ sarà chiamato <u>connessione del secondo ordine di specie</u> $(0,1)$; l'ente geometrico avente per componenti soltanto le funzioni $C^{pq}_{ij,h}$ si chiamerà C-<u>connessione di specie</u> $(0,1)$.

Si mostrerà ora che le connessioni del secondo ordine di specie $(0,1)$, così come ha provato C.Di Comite in [5] per le connessioni del secondo ordine, possono essere definite globalmente su V_n.

DEF. 2. - Sia $\mathcal{C}:(X,Y)\to\mathcal{C}_{X,Y}$ una applicazione $\mathbb{R}$-lineare di $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ nello spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle applicazioni $\mathbb{R}$-lineari di $\mathcal{T}^0_1$ in $\mathcal{T}^1_1$ soddisfacente ai seguenti assiomi:

$$(C_1)\qquad \mathcal{C}_{fX,Y}\omega = f\mathcal{C}_{X,Y}\omega - Y(f)X\otimes\omega$$

$$(C_2)\qquad \mathcal{C}_{X,fY}\omega = f\mathcal{C}_{X,Y}\omega$$

$$(C_3)\qquad \mathcal{C}_{X,Y}f\omega = f\mathcal{C}_{X,Y}\omega + X(f)\,Y\otimes\omega + Y(f)X\otimes\omega$$

per ogni $f\in\mathcal{F}$, per ogni $X,Y\in\mathcal{X}$ e per ogni $\omega\in\mathcal{T}^0_1$.

Sia inoltre $\mathcal{D}:(X,Y)\to\mathcal{D}_{X,Y}$ un'applicazione $\mathcal{F}$-bilineare di $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ nell'$\mathcal{F}$-modulo degli endomorfismi di $\mathcal{T}^0_1$ soddisfacente al seguente assioma:

$$(D)\qquad \mathcal{D}_{X,Y}f\omega = f\mathcal{D}_{X,Y}\omega + C^1_1(df\otimes\mathcal{C}_{X,Y}\omega) + Y(X(f))\omega$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$, per ogni $X,Y \in \mathcal{X}$, per ogni $\omega \in \mathcal{T}_1^0$

e dove si è indicato con C_1^1 la contrazione del primo indice di controvarianza col primo indice di covarianza.

Si dice allora che la coppia di operatori $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ definisce su V_n una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie (0,1) e che l'operatore $\mathcal{C}$ definisce su V_n una C-connessione di specie (0,1).

Per ogni $\omega \in \mathcal{T}_1^0$, il campo tensoriale $D^2\omega \in \mathcal{T}_3^0$ così definito

$$(1.4) \qquad D^2\omega : (X,Y) \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}_{X,Y}\omega \in \mathcal{T}_1^0$$

si chiama differenziale covariante secondo di ω rispetto a Γ^2 e l'applicazione

$$D^2 : \omega \rightarrow D^2\omega$$

si chiama differenziazione covariante del secondo ordine rispetto a Γ^2.

Come per le connessioni del secondo ordine (cfr.[5]) sussiste la seguente:

Prop. 1 - Se ∇ è la derivazione covariante rispetto ad una connessione lineare Γ su V_n, gli operatori $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ definiti per ogni $(X,Y) \in \mathcal{X}$ e per ogni $\omega \in \mathcal{T}_1^0$ nel modo seguente:

$$(1.5) \qquad \mathcal{C}_{X,Y}\,\omega = X \otimes \nabla_Y\omega + Y \otimes \nabla_X\omega - (\nabla_Y X) \otimes \omega$$

$$(1.6) \qquad \mathcal{D}_{X,Y}\,\omega = \nabla_Y(\nabla_X\omega) - \nabla_{\nabla_Y X}\omega$$

determinano su V_n una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie (0,1) tale che la differenziazione covariante D^2 rispetto a Γ^2 coincide con l'ordinaria differenziazione covariante ∇^2 del secondo ordine rispetto a Γ

La connessione del secondo ordine di specie (0,1) definita dalla proposizione precedente secondo le (1.5) e (1.6) si chiama dedotta dalla connessione lineare Γ.

Se Γ^2 è una connessione del secondo ordine di specie (0,1) definita da $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, é facile verificare che essa induce su ogni sottovarietà aperta U di V_n una connessione Γ^2_U dello stesso tipo.

Se (U, ϕ) é una carta locale di V_n con $\phi = (x^1,\dots,x^n)$, posto per ogni $i = 1,\dots n$ $\frac{\partial}{\partial x^i} = e_i$ e $dx^j = e^j$, le funzioni $C^{pq}_{ij,h}$ e $D^p_{ij,h}$ definite su U da:

$$(1.7) \qquad (\mathcal{C}_U)_{e_i,e_j} e^p = C^{pq}_{ij,h}\, e_q \otimes e^h$$

$$(1.8) \qquad (\mathcal{D}_U)_{e_i,e_j} e^p = D^p_{ij,h}\, e^h$$

si chiamano componenti di Γ^2 nella carta (U,ϕ).

Indicate con $C^{p'q'}_{i'j',h'}$ e $D^{p'}_{i'j',h'}$ le componenti di Γ^2 in un'altra carta locale (U',ϕ') tale cge $U \cap U' \neq \emptyset$, si verifica facilmente che sussistono le (1.2) e (1.3) dette formule di trasformazione delle componenti di Γ^2.

Viceversa se su ogni carta locale (U,ϕ) di V_n vengono assegnate due famiglie di funzioni $C^{pq}_{ij,h}$ e $D^p_{ij,h}$ verificanti le (1.2) e (1.3) in ogni intersezione non vuota di due domini di tali carte, si può definire, mediante le (1.7) e (1.8), una coppia di operatori $(\mathcal{C}_U,\mathcal{D}_U)$ che determina su U una connessione del secondo ordine di specie (0,1) Γ^2_U . Si definisce infine su V_n un'unica connessione del secondo ordine di specie (0,1) determinata dalla coppia di operatori $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ tale che, se $p \in V_n$ e (U,ϕ) è una carta locale con $p \in U$, risulti:

$$(\mathcal{C}_{X,Y}\omega)_p = (\,(\mathcal{C}_U)_{X_{|U},Y_{|U}}\,\omega_{|U})_p \;, \quad (\mathcal{D}_{X,Y}\omega)_p = (\,(\mathcal{D}_U)_{X_{|U},Y_{|U}}\,\omega_{|U})_p$$

per ogni $X,Y \in \mathcal{X}$ e per ogni $\omega \in \mathcal{T}^0_1$.

Ne segue che la DEF. 1 di connessione del secondo ordine di specie (0,1) è equivalente alla DEF.2 .

Si osservi che se Γ^2 è una connessione del secondo ordine di specie (0,1) dedotta da una connessione lineare di componenti Γ^h_{ij}, allora le componenti di Γ^2 sono, come segue facilmente da (1.5) e (1.6):

$$C^{pq}_{ij,h} = -\delta^q_i \, \Gamma^p_{jh} - \delta^q_j \, \Gamma^p_{ih} - \delta^p_h \, \Gamma^q_{ji} \tag{1.9}$$

$$D^p_{ij,h} = -\partial_j \Gamma^p_{ih} + \Gamma^p_{ik} \Gamma^k_{jh} + \Gamma^k_{ji} \Gamma^p_{kh} \, . \tag{1.10}$$

Come in [5] sussistono le seguenti due proposizioni:

PROP. 2 - Se $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ è una coppia di operatori che determina su V_n una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie (0,1) allora la coppia di operatori $(\mathcal{C}',\mathcal{D}')$ definita da :

$$\mathcal{C}'_{X,Y}\,\omega = \frac{1}{2}\left(\mathcal{C}_{X,Y}\,\omega + \mathcal{C}_{Y,X}\,\omega + [X,Y] \otimes \omega\right) \qquad \forall\, X,Y \in \mathcal{X}$$

$$\mathcal{D}'_{X,Y}\,\omega = \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}_{X,Y}\,\omega + \mathcal{D}_{Y,X}\,\omega\right) \qquad \forall\, \omega \in \mathcal{T}^0_1$$

determina su V_n una connessione Γ'^2 del secondo ordine di specie (0,1). Se $(\ ^{pq}_{ij,h}\ ,\ D^p_{ij,h})$ sono le componenti di Γ^2 in una carta locale (U,ϕ), allora le componenti di Γ'^2 nella stessa carta sono $(C^{pq}_{(ij),h}\ ,\ D^p_{(ij),h})$.

PROP. 3. - La più generale connessione del secondo ordine di specie (0,1) è determinata dalla coppia di operatori $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ tali che:

$$\mathcal{C}_{X,Y}\,\omega = X \otimes \nabla_Y\,\omega + Y \otimes \nabla_X \omega - (\nabla_Y X) \otimes \omega + A(X,Y\,,\omega)$$

$$\mathcal{D}_{X,Y}\,\omega = \nabla_Y \nabla_X \omega - \nabla_{\nabla_Y X}\,\omega + (C^{12}_{45}(A \otimes \nabla\omega))(X,Y) + S(X\,,Y,\omega)$$

per ogni $X,Y \in \mathcal{X}$ e $\omega \in \mathcal{T}_1^0$ e dove ∇ è la derivazione covariante rispetto ad una connessione lineare ed A e S sono due qualsiasi campi tensoriali di specie $(2,3)$ e $(1,3)$ rispettivamente.

Sia Γ^2 una connessione del secondo ordine di specie (0,1) definita da (C,D) e sia $\omega \in \mathcal{T}_1^0$ avente componenti ω_i in una carta locale (U,ϕ) di V_n, allora le componenti del campo di tensori tripli covarianti $D^2\omega$ nella stessa carta sono le (1.1.).

In particolare se $f \in \mathcal{F}$ le componenti in (U,ϕ) di $D^2(df)$ sono:

(1.12) $$\partial_{ijh} f + C^{pq}_{ij,h}\, \partial_{pq} f + D^{p}_{ij,h}\, \partial_p f \; .$$

Per ogni $f \in \mathcal{F}$ il campo di tensori $\delta^3 f = D^2(df)$ si chiama differenziale covariante terzo di f rispetto a Γ^2 e l'operatore

$$\delta^3 = D^2 \circ d : f \to \delta^3 f$$

si chiama differenziazione covariante terza rispetto a Γ^2.

Si osservi che se Γ^2 è dedotta da una connessione lineare Γ, tenendo presenti le (1.9) e (1.10) segue che l'operatore δ^3 coincide con l'operatore Δ^3 di derivazione covariante terza rispetto a Γ studiato in [11].

2. SPAZI DI COOMOLOGIA ASSOCIATI A Γ^2. -

L'operatore δ^3 di differenziazione covariate terza dispetto ad una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie (0,1) è un omomorfismo (rispetto alle strutture di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{T}_3^0$) e quindi $\delta^3(\mathcal{F})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{T}_3^0$. Un campo di tensori ω appartenente a $\delta^3(\mathcal{F})$ si chiamerà esatto rispetto a δ^3.

Da (1.12) segue che $\omega \in \overset{o}{_3}$ è esatto rispetto a δ^3 se e solo se esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che, qualunque sia la carta locale (U,ϕ) di V_n rispetto alla quale ω abbia componenti ω_{ijh}, risulti:

$$\omega_{ijh} = \partial_{ijh} f + C^{pq}_{ij,h}\, \partial_{pq} f + D^{p}_{ij,h}\, \partial_p f \,. \tag{2.1}$$

Un campo di tensori $\omega \in \overset{o}{_3}$ si dirà invece chiuso rispetto a δ^3 se è localmente esatto, cioé se per ogni $p \in V_n$ esiste una carta locale (U,ϕ) di V_n con $p \in U$ ed esiste una funzione f differenziabile in U legata alle componenti ω_{ijh} di ω in (U,ϕ) dalla relazione (2.1).

Indicati con $E^3_{\Gamma^2}$ e $C^3_{\Gamma^2}$ gli insiemi dei campi di tensori differenziabili tripli covarianti rispettivamente esatti e chiusi rispetto a δ^3, $E^3_{\Gamma^2} = \delta^3(\mathcal{F})$ è un sottospazio di $\overset{o}{_3}$; inoltre è facile provare che anche $C^3_{\Gamma^2}$ è un sottospazio di $\overset{o}{_3}$ e poiché ogni campo di tensori esatto rispetto a δ^3 è anche chiuso rispetto a δ^3, $E^3_{\Gamma^2}$ è un sotto spazio di $C^3_{\Gamma^2}$

DEF. 1. - Lo spazio vettoriale quoziente

$$H^3_{\Gamma^2} = C^3_{\Gamma^2} / E^3_{\Gamma^2}$$

si chiama spazio di coomologia di V_n rispetto a Γ^2 dei campi di tensori differenziabili tripli covarianti.

Allo scopo di studiare lo spazio di coomologia $H^3_{\Gamma^2}$ definito precedentemente, si consideri il fascio di funzioni su V_n che si ottiene associando ad ogni aperto A di V_n lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ $\mathcal{P}_A$ delle funzioni f_A differenziabili in A tali che

$$\delta^3 f_A = 0 \qquad \text{in } A,$$

e associando ad ogni coppia di aperti A e B di V_n tali che $A \supseteq B$

l'omomorfismo di restrizione $i^A_B : f_A \in \mathcal{P}_A \to f_{A|B} \in \mathcal{P}_B$.

Tale fascio si chiamerà fascio delle funzioni a differenziale covariante terzo rispetto a Γ^2 nullo e lo si indicherà con $\mathcal{P}_{\Gamma^2}(V_n, {}_A, i^A_B)$ o semplicemente con $\mathcal{P}_{\Gamma^2}$.

Si premetteranno ora alcune necessarie notazioni e brevi richiami della teoria dei fasci che saranno utili in seguito.

Se $U = (U_i)_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto proprio di V_n si indicherà con:

$\mathcal{P}^0_{\Gamma^2}(U)$ lo spazio vettoriale delle 0-cocatene relative ad U e a coefficienti in $\mathcal{P}_{\Gamma^2}$;

$Z^1_{\Gamma^2}(U)$ lo spazio vettoriale degli 1-cocicli relativi ad U e a coefficienti in $\mathcal{P}_{\Gamma^2}$;

∂ l'omomorfismo di cobordo e con $E^1_{\Gamma^2}(U) = \partial\mathcal{P}^0_{\Gamma^2}(U)$ lo spazio vettoriale dei cobordi sottospazio di $Z^1_{\Gamma^2}(U)$;

$\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U) = Z^1_{\Gamma^2}(U)/\partial\mathcal{P}^0_{\Gamma^2}(U)$ lo spazio di coomologia 1-dimensionale relativo ad U e a valori in $\mathcal{P}_{\Gamma^2}$.

Indicato ora con $\mathcal{U}$ l'insieme preordinato e filtrante dei ricoprimenti aperti propri di V_n, se $U, U' \in \mathcal{U}$ U' è un raffinamento di U ($U \geq U'$) con applicazione di raffinamento t, si indica con $T^U_{U'}$ l'omomorfismo (che risulta indipendente da t) che ad ogni $[p^1_U] \in {}^1_{\Gamma^2}(U)$ associa $[T^U_{U'}(p^1_U)] \in \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U')$. Tali omomorfismi hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} T^U_U = \text{identità} & \forall U \in \mathcal{U} \\ T^{U'}_{U''} \circ T^U_{U'} = T^U_{U''} & U \geq U' \geq U'' \end{cases}$$

quindi $\{\mathcal{U}, \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U), T^U_{U'}\}$ è un sistema diretto di spazi vettoriali. Il limite induttivo di tale sistema diretto si indica con $\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$ e si chiama spazio di coomologia 1-dimensionale di V_n a coefficienti in $\mathcal{P}_{\Gamma^2}$.

Infine, denotato con

$$T^U : \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U) \to \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$$

l'omomorfismo canonico, valgono le seguenti proprietà:

$$(2.2)\quad \begin{cases} T^{U'} \circ T^U_{U'} = T^U & \forall U,U' \in \mathcal{U} \ \ni' \ U \geq U' ; \\ T^U([p^1_U]) = T^{\bar{U}}([p^1_{\bar{U}}]) \Longleftrightarrow & \exists U' \in \mathcal{U} \ \ni' \ U \geq U',\ \bar{U} \geq U' \\ & \text{e } T^U_{U'}([p^1_U]) = T^{\bar{U}}_{U'}([p^1_{\bar{U}}]) \\ \bigcup_{U \in \mathcal{U}} T^U \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U)) = \mathcal{H}^1_{\Gamma^2} . \end{cases}$$

Si dimostrerà la seguente :

Proposizione 1. - Lo spazio $H^3_{\Gamma^2}$ di coomologia di V_n rispetto a Γ^2 dei campi di tensori differenziabili tripli covarianti e isomorfo allo spazio $\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$ di coomologia 1-dimensionale di V_n delle funzioni a differenziale covariante terzo rispetto a Γ^2 nullo.

Dimostrazione. - Se $\omega \in C^3_{\Gamma^2}$, esiste un ricoprimento aperto proprio di V_n $U = (U_i)_{i\in I}$ ed esiste una famiglia di funzioni $f_U = (f_i)_{i\in I}$ con f_i differenziabile in U_i tale che

$$(2.3)\qquad \forall i \in I \qquad \delta^3 f_i = \omega_{|U_i} .$$

Indicato con $I^2_* = \{(i,j) \in I^2 | U_i \cap U_j \neq \emptyset\}$ si ponga:

$$(2.4)\qquad \forall (i,j) \in I^2 \qquad f_{ij} = f_i - f_j .$$

Per la (2.3) e (2.4) risulta:

a) $\quad \forall (i,j) \in I^2_* \quad \delta^3 f_{ij} = 0 \quad ; \quad \forall (i,j) \in I^2_* \ ;$

b) $\quad f^1_U = \{f_{ij}\}_{(i,j)\in I^2_*} \in Z^1_{\Gamma^2}(U)\ .$

Poiché si prova facilmente che la classe $f^1 = T^U([f^1_U]) \in \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$ non varia al variare del ricoprimento U e della famiglia f_U, si è costruita un'applicazione, che risulta un $\mathbb{R}$-omomorfismo:

$$\phi \ : \omega \in C^3_{\Gamma^2} \to f^1 \in \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}\ .$$

Risulta $\ker \phi = E^3_{\Gamma^2}$ e quindi, per il teorema fondamentale sugli omomorfismi tra spazi vettoriali, dall'omomorfismo ϕ si ottiene il monomorfismo

$$\Phi : [\omega] \in C^3_{\Gamma^2}/\mathrm{Ker}\phi = H^3_{\Gamma^2} \to f^1 \in \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}\ .$$

Si proverà ora che Φ è surgettiva e quindi la proposizione sarà completamente dimostrata.

Sia $p^1 \in \mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$, allora esisterà (per l'ultima delle relazioni (2.2))un ricoprimento aperto proprio $U = (U_i)_{i\in I}$ tale che $p^1 \in T^U(\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}(U))$ e sia $[p^1_U]$, con $p^1_U = \{p_{ij}\}_{(i,j)\in I^2_*} \in Z^1_{\Gamma^2}(U)$, un qualsiasi elemento di $(T^U)^{-1}(p^1)$.

Si consideri ora una partizione dell'unità di V_n $\{\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ relativa al ricoprimento U e sia $h : m \in \mathbb{N}^+ \to h(m) \in I$ un'applicazione di raffinamento relativa ad U e a $\{\mathrm{supp}\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ tale che $\forall m \in \mathbb{N}^+$ $\mathrm{supp}\ \phi_m \subseteq U_{h(m)}$.

Per ogni $i \in I$ e per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ si consideri la funzione f_{im} definita in U_i nel seguente modo:

$$(2.5) \qquad f_{im} = \begin{cases} 0 & \text{in } U_i - U_{h(m)} \\ p_{ih(m)}\phi_m & \text{in } U_i \cap U_{h(m)} \end{cases} \ ;$$

f_{im} è differenziabile in U_i, essendo ivi localmente differenziabile.

Per (2.5) risulta $\operatorname{supp} f_{im} \subseteq \operatorname{supp} \phi_m$, ed essendo $\{\operatorname{supp}\phi_m\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ un ricoprimento localmente finito di V_n, $\{\operatorname{supp} f_{im}\}_{m\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento localmente finito di U_i. Ne segue che per ogni $p \in U_i$ esiste un intorno aperto U_p di p ed esiste un sottoinsieme finito $N_p \neq \emptyset$ di $\mathbb{N}$ tali che in U_p si abbia:

$$\sum_{m\in\mathbb{N}^+} f_{im} = \sum_{m\in N_p} f_{im} \,.$$

Allora per ogni $i \in I$ la funzione f_i definita in U_i nel seguente modo

$$f_i = \sum_{m\in\mathbb{N}^+} f_{im}$$

è differenziabile in U_i essendolo ivi localmente.

In questo modo si è ottenuta la famiglia di funzioni $f_U = \{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ relativa al ricoprimento U per la quale risulta per (2.5):

$$\forall (ij)\in I^2_* \qquad f_{im} - f_{jm} = (p_{ih(m)} - p_{jh(m)})\phi_m \qquad \text{in } U_i \cap U_j \cap U_{h(m)}$$

ed essendo

$$f_{im} = f_{jm} = \phi_m = 0 \qquad \text{in } U_i \cap U_j \cap U_{h(m)}$$

risulta:

$$f_{im} - f_{jm} = p_{ij}\,\phi_m \qquad \text{in} \quad U_i \cap U_j \neq \emptyset \,.$$

Per cui, sommando per m variabile in N^+ ed essendo $\sum_{m\in N^+}\phi_m = 1$ si ha:

$$f_i - f_j = p_{ij} \qquad \forall (i,j) \in I^2_* \,, \tag{2.6}$$

cioé l'1-cociclo determinato dalla famiglia $f_U = (f_i)_{i\in I}$ coincide con l'1-cociclo p^1_U. Essendo inoltre $\delta^3 p_{ij} = 0$, da (2.6) segue che:

$$\delta^3 f_i = \delta^3 f_j \qquad \forall (ij)\in I^2_* \,.$$

Ponendo allora per ogni $i \in I$ $\omega|_{U_i} = \delta^3 f_i$, risulta che il campo di tensori $\omega\in\mathcal{T}^0_3$ così definito, **è chiuso rispetto** a δ^3 e la famiglia di funzioni f_U è ad esso associata. Poiché l'1-cociclo f^1_U determinato da f_U coincide con l'1-cociclo p^1_U, si ha:

$$f^1 = T^U(f^1_U) = T^U p^1_U) = p^1$$

e quindi $$\Phi([\omega]) = \phi(\omega) = f^1 = p^1$$

cioé Φ è surgettiva e quindi la proposizione è completamente provata.

3. ESEMPI

Sia assegnata su V_n una connessione Γ^2 del secondo ordine di specie (0,1): per provare che lo spazio di coomologia $H^3_{\Gamma^2}$ (isomorfo a $\mathcal{H}^1_{\Gamma^2}$) é un sovraspazio, in generale proprio, dello spazio $\mathcal{H}^1$ di coomologia 1-dimensionale a coefficienti reali e quindi dello spazio H^1 di coomologia 1-dimensionale di De Rham, si osservi che, per (2.1), una funzione differenziabile ha differenziale covariante terzo rispetto a Γ^2 nullo se in ogni carta locale (U,ϕ) la sua immagine f in tale carta é tale che:

$$(3.1) \qquad \partial_{ijh}f + C^{pq}_{ij,h}\,\partial_{pq}f + D^{p}_{ij,h}\,\partial_{p}f = 0.$$

Le condizioni d'integrabilità del sistema (3.1), tenuto conto del teorema sull'invertibilità dell'ordine delle derivazioni, sono :

$$(3.2) \qquad (C^{pq}_{ij,h}C^{rs}_{pq,l} - \partial_l C^{rs}_{ij,h} - \delta^s_l D^r_{ij,h} - C^{pq}_{ij,l}\,C^{rs}_{pq,h} + \partial_h C^{rs}_{ij,l} +$$

$$+ \delta^s_h D^r_{ij,l})\,\partial_{rs}f + (C^{pq}_{ij,h}\,D^r_{pq,l} - \partial_l D^r_{ij,h} - C^{pq}_{ij,l}\,D^r_{pq,h} +$$

$$+ \partial_h D^r_{ij,l})\,\partial_r f = 0 .$$

E' immediato che il sistema (3.1), qualunque sia Γ^2, é soddisfatto dalle funzioni localmente costanti; se esso é soddisfatto soltanto dalle funzioni localmente costanti, $H^3_{\Gamma^2}$ é isomorfo allo spazio $\mathcal{H}^1$ di coomologia 1-dimensionale a coefficienti reli e quindi ad H^1.

Se il sistema (3.1) é soddisfatto anche da altre funzioni, $H^3_{\Gamma^2}$ é un sovraspazio proprio di H^1: ciò si verifica in alcuni esempi che saranno ora illustrati.

E' noto che se Γ é una connessione lineare simmetrica localmente piatta, esiste un atlante in ogni carta del quale le componenti di Γ sono identicamente nulle e viceversa. Da ciò e dalle (1.9) e (1.10) segue facilmente la seguente:

Prop. 1.- <u>Se Γ^2 è una connessione del secondo ordine di specie</u> (0,1) <u>dedotta da una connessione lineare simmetrica</u> Γ, <u>allora</u> Γ <u>è localmente piatta se e solo se esiste un atlante in ogni carta del quale le componenti</u> $(C^{pq}_{ij,h}, D^p_{ij,h})$ <u>di</u> Γ^2

nulle.

Sia Γ^2 una connessione del secondo ordine dedotta da una connessione lineare localmente piatta, per la proposizione precedente esiste un atlante $(U_a, \phi_a)_{a \in \mathcal{A}}$ - che non è restrittivo supporre numerabile e costituito da sferoidi - in ogni carta del quale le componenti $C^{pq}_{ij,h}$ e $D^{p}_{ij,h}$ di Γ^2 sono identicamente nulle. Perciò in tale atlante i cambiamenti di coordinate sono lineari e il sistema (3.1) diventa:

$$(3.3) \qquad \partial_{ijh} f = 0 \qquad \text{in} \quad (U_a, \phi_a).$$

Ne segue che le funzioni aventi differenziale covariante terzo rispetto a Γ^2 nullo, sono le funzioni di 2° grado a coefficienti costanti delle coordinate x^i relative alla carta (U_a, ϕ_a) e pertanto lo spazio vettoriale P_{U_a} del fascio P_{Γ^2} relativo ad U_a è isomorfo a $R^{\frac{n(n+3)}{2}+1}$.

Inoltre per ogni $(a,b) \in \mathcal{A}^2$ tale che $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, ogni funzione f tale che $\delta^3 f = 0$ in $U_a \cap U_b$ è una funzione di 2° grado a coefficienti localmente costanti delle coordinate di un punto di $U_a \cap U_b$ in una qualunque delle due carte (U_a, ϕ_a) o (U_b, ϕ_b). Quindi lo spazio vettoriale $P_{U_a \cap U_b}$ è isomorfo a $\left(\mathbb{R}^{\frac{n(n+3)}{2}+1}\right)^v$, dove si è indicato con v il numero delle componenti connesse di $U_a \cap U_b$. Essendo lo spazio vettoriale delle funzioni localmente costanti relativo ad $U_a \cap U_b$ isomorfo a $\mathbb{R}^v$, ne segue facilmente che $H^3_{\Gamma^2}$ è isomorfo alla potenza $(\frac{n(n+3)}{2} + 1)$-esima dello spazio $\mathcal{H}^1$ di coomologia 1-dimensionale a coefficienti reali, quindi:

$$\dim H^3_{\Gamma^2} = \left(\frac{n(n+3)}{2} + 1\right) \cdot \dim H^1.$$

Sia ora V_n una varietà differenziabile che ammetta un atlante $\{(U_a, \phi_a)\}_{a \in \{1,2,3\}}$ tale che per ogni $(a,b) \in \{1,2,3\}^2$ $U_a \cap U_b$ sia connesso e dette x^i_a le coordinate dei punti di V_n nella carta (U_a, ϕ_a), i cambiamenti di coordinate siano dati da:

$$\frac{\partial \underset{2}{x}^i}{\partial \underset{1}{x}^j} = \frac{\partial \underset{1}{x}^i}{\partial \underset{2}{x}^j} = -\delta^i_j \;; \qquad \frac{\partial \underset{3}{x}^i}{\partial \underset{1}{x}^j} = \frac{\partial \underset{1}{x}^i}{\partial \underset{3}{x}^j} = -\delta^i_j \;; \qquad \frac{\partial \underset{2}{x}^i}{\partial \underset{3}{x}^j} = \frac{\partial \underset{3}{x}^i}{\partial \underset{2}{x}^j} = \delta^i_j$$

Su tale varietà si consideri una connessione lineare Γ avente in ogni (U_a, ϕ_a) componenti tutte nulle ad eccezione di $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} =$ $= h \in \mathbb{R} - \{0\}$ e sia Γ^2 la connessione del 2° ordine dedotta da tale connessione lineare.

Tenendo conto di (1.8) e (1.9), i sistemi (3.1) e (3.2) diventano rispettivamente

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \partial_{121} f - 2\,h\,\partial_{11} f = 0 \\ \partial_{122} f - 2\,h\,\partial_{12} f + h^2\,\partial_1 f = 0 \\ \partial_{ijh} f = 0 \qquad \forall (ij,h) \neq \begin{matrix}(1,2,1)\\(1,2,2)\end{matrix} \end{cases}$$

$$(3.5) \qquad \begin{cases} \partial_{11} f = 0 \\ -3\partial_{12} f + 2h\partial_1 f = 0 \end{cases}$$

Derivando ulteriormente l'ultima equazione del sistema (3.5) e tenendo conto dell'invertibilità dell'ordine delle derivazioni si ottiene

$$\partial_1 f = 0$$

che è l'unica condizione d'integrabilità. Ne segue che il sistema (3.4) e (3.5) equivale al sistema:

$$\partial_{ijh} f = 0 \qquad \forall (i,j,h)$$

$$\partial_1 f = 0$$

le cui soluzioni sono tutte e sole le funzioni del tipo:

$$f(x_1,\dots,x_n) = c_{22}\, x_2^2 + \dots + c_{nn} x_n^2 + c_{23} x_2 x_3 + \dots + c_{n-1\,n}\, x_{n-1} x_n + c_{02}\, x_2 + \dots + c_{0n}\, x_n + c_{00}$$

con c_{ij} costanti reali e (x^i) coordinate nella carta (U_a,ϕ_a).

Ne segue che lo spazio vettoriale P_{U_a} del fascio P_Γ relativo ad U_a è isomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e quindi, come è facile verificare, lo spazio $H^3_{\Gamma^2}$ è isomorfo alla potenza $(\frac{n(n+1)}{2})$-esima dello spazio di coomologia 1-dimensionale $\mathcal{H}^1$ a coefficienti reali e quindi

$$\dim H^3_{\Gamma^2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \dim H^1 .$$

4. SPAZI DI COOMOLOGIA ASSOCIATI AD UNA PSEUDOCONNESSIONE LINEARE.

In modo analogo a quanto fatto nel n.2 per le connessioni del secondo ordine di specie (0,1), si determinerà ora una successione di spazi di coomologia associata ad una pseudoconnessione lineare su V_n.

E' noto (cfr. [5]) che una pseudoconnessione lineare Γ su V_n é definita da una applicazione $D : X \longrightarrow D_X$ $\mathcal{F}$-lineare di $\mathcal{X}$ nell' $\mathcal{F}$-modulo delle derivazioni di $\mathcal{T} = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathcal{T}_s^r$. Resta così determinato il seguente campo tensoriale A di specie (1,1)

$$A : (f,X) \in \mathcal{F} \times \mathcal{X} \longrightarrow A(f,X) = D_X f$$

detto <u>campo fondamentale</u> della pseudoconnessione; si ha pertanto:

$$\forall\ f \in \mathcal{F}\ ,\ \forall\ (X,Y) \in \mathcal{X}^2 \qquad D_X(fY) = f\ D_X Y + A(f,X)Y\ .$$

Se (U,ϕ) é una carta locale di V_n con $\phi = (x^1,\dots x^n)$, posto $\frac{\partial}{\partial x^i} = e_i$, le funzioni A_i^j e Γ_{ij}^k così definite su U:

$$(D_U)_{e_i}\, x^j = A_i^j\ , \qquad (D_U)_{e_i}\, e_j = \Gamma_{ij}^k\, e_k$$

si chiamano <u>componenti</u> di Γ nella carta (U,ϕ).

Se $K \in \mathcal{T}_s^r$, si chiama <u>pseudodifferenziale covariante</u> di K e si indica DK il campo tensoriale di specie $(r,s+1)$ definito per ogni $X_1,\dots X_s, Y \in \mathcal{X}$ da:

$$(4.1) \qquad (DK)(X_1,\dots,X_s,Y) = (D_Y K)(X_1,\dots,X_s).$$

Per ogni $m > 1$ lo <u>pseudodifferenziale covariante</u> m-<u>esimo</u> $D^m K$ é definito induttivamente da

$$D^m K = D(D^{m-1}K).$$

Siano A_j^i e Γ_{ij}^k le componenti di Γ in una carta locale (U,ϕ) e siano $\omega_{j_1 \dots j_s}$ le componenti di un campo di tensori $\omega \in \mathcal{T}_s^0$ nella stessa carta, da (4.1) segue allora che le componenti $\omega_{j_1 \dots j_s, k}$ di $D\omega$ sono:

$$\omega_{j_1 \dots j_s, k} = A^h_k \, \partial_h \, \omega_{j_1 \dots j_s} - \sum_{\beta=1}^{s} \Gamma^h_{k j_\beta} \, \omega_{j_1 \dots h \dots j_s} \, . \tag{4.2}$$

Si ponga per ogni $f \in \mathcal{F}$

$$\delta^1 f = df$$

e per ogni $q > 1$

$$\delta^q f = D^{q-1}(df);$$

in questo modo, per ogni $q \geq 1$, si é definita un'applicazione

$$\delta^q : f \in \mathcal{F} \longrightarrow \delta^q f \in \mathcal{T}^0_q$$

che si chiamerà <u>differenziazione covariante</u> q-esima rispetto alla pseudo connessione lineare Γ.

Indicate con $\delta_{i_1 \dots i_q} f$ le componenti di $\delta^q f$ in una carta locale (U,ϕ), per la (4.2) risulta ad esempio:

$$\delta_i f = \partial_i f \, ;$$

$$\delta_{i_1 i_2} f = A^h_{i_2} \, \partial_{i_1 h} f - \Gamma^h_{i_2 i_1} \, \partial_h f \, ;$$

$$\delta_{i_1 i_2 i_3} f = A^{h_1}_{i_3} \, A^{h_2}_{i_2} \, \partial_{i_1 h_1 h_2} f + (\delta^{h_1}_{i_1} \, A^r_{i_3} \, \partial_r \, A^{h_2}_{i_2} - A^{h_1}_{i_3} \, \Gamma^{h_2}_{i_2 i_1} -$$

$$A^{h_1}_{i_2} \, \Gamma^{h_2}_{i_3 i_1} - \delta^{h_2}_{i_1} \, A^{h_1}_r \, \Gamma^r_{i_3 i_2}) \, \partial_{h_1 h_2} f + (-A^r_{i_3} \, \partial_r \, \Gamma^h_{i_2 i_1} + \Gamma^k_{i_3 i_1} \, \Gamma^h_{i_2 k} +$$

$$\Gamma^k_{i_3 i_2} \Gamma^h_{k i_1}) \, \partial_h f.$$

Un campo $\omega \in \mathcal{T}^0_q$ si dirà <u>esatto</u> rispetto a δ^q se esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che $\delta^q f = \omega$; ne segue che ω é esatto se e solo se esiste $f \in \mathcal{F}$ tale che, qualunque sia la carta locale (U,ϕ) nella quale ω abbia componenti $\omega_{i_1 \dots i_q}$, risulti :

$$\omega_{i_1 \dots i_q} = \delta_{i_1 \dots i_q} f. \tag{4.3}$$

Un campo $\omega \in \mathcal{T}^0_q$ si dirà <u>chiuso</u> rispetto a δ^q se é localmente esatto, cioé se per ogni $p \in V_n$ esiste una carta locale (U,ϕ) di V_n tale che $p \in U$ ed esiste una funzione f differenziabile in U per la quale sia verificata la (4.3).

Indicati con E^q_Γ e con C^q_Γ gli insiemi dei campi di tensori q-pli rispettivamente esatti e chiusi rispetto a Γ, risulta $E^q_\Gamma = \delta^q(\mathcal{F})$, ed essendo δ^q un omomorfismo E^q_Γ é un sottospazio di $\mathcal{T}^o_q$. E' inoltre facile verificare che anche C^q_Γ é un sottospazio di $\mathcal{T}^o_q$ e che contiene E^q_Γ.

Lo spazio quoziente $C^q_\Gamma/E^q_\Gamma = H^q_\Gamma$ si chiama *spazio di coomologia di V_n rispetto a Γ dei campi di tensori covarianti* q-pli.

Si é così costruita una successione di spazi di coomologia $\{H^q_\Gamma\}_{q \in N^+}$ di cui il primo H^1_Γ coincide manifestamente con lo spazio di coomologia 1-dimensionale H^1 di De Rham e quindi é un invariante topologico di V_n, mentre i rimanenti sono degli invarianti di V_n dipendenti dalla pseudoconnessione Γ.

Si consideri per ogni $q>1$ il fascio di funzioni su V_n ottenuto associando ad ogni aperto A di V_n lo spazio vettoriale su R $\mathcal{P}^q_A$ delle funzioni f_A differenziabili in A tali che :

$$\delta^q f_A = 0 \quad \text{in } A,$$

e ad ogni coppia di aperti A e B tali che $A \quad B$ l'omomorfismo di restrizione $i^A_B : \mathcal{P}^q_A \dashrightarrow \mathcal{P}^q_B$ che ad ogni $f_A \in \mathcal{P}^q_A$ fa corrispondere la sua restrizione a B. Tale fascio si indicherà con $\mathcal{P}^q_\Gamma$ e si chiamerà *fascio delle funzioni a differenziale covariante* q-esimo *rispetto a Γ nullo.*

Indicato con $\mathcal{H}^{q,1}_\Gamma$ lo spazio di coomologia 1-dimensionale di V_n a coefficienti nel fascio $\mathcal{P}^q_\Gamma$ si dimostra in modo analogo alla Prop.1 del n.2 che: *per ogni* $q>1$ *lo spazio* H^q_Γ *é isomorfo allo spazio* $\mathcal{H}^{q,1}_\Gamma$.

B I B L I O G R A F I A

[1] ABATANGELO V. LARATO B. Coomologia a coefficienti nel fascio delle funzioni a gradiente parallelo su una varietà a connessione lineare, Rend.Sem.Fac.Sc.Univ. Cagliari,L,1-2, 1980.

[2] BOMPIANI E. Connessioni del secondo ordine, Rend.Acc.Naz. Lincei, (8), 1, 1946.

[3] BISHOP R.L. GOLDBERG S.I. Tensor Analysis on Manifolds, Mac Millan Company, New York, 1968.

[4] DE RHAM G. Varietés differentiables, Act.Sci.et Ind., 1222, Paris, Hermann, 1960.

[5] DI COMITE C. Sulle connessioni del secondo ordine, Ann.Mat. Pura e Appl.,(IV),LXXIX,1968.

[6] DI COMITE C. Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile, Ann.Mat. Pura e Appl.,(IV),LXXXIII,1969.

[7] GODEMENT R. Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Act. Sci.et Ind.,1252;Paris, Hermann, 1958.

[8] HELGASON S. Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York and London, 1978.

[9] HIRZEBRUCH F. Topological methods in algebraic geometry, Springer-Verlag, New York, 1966.

[10] MASTROGIACOMO P. Spazi di coomologia dei campi di 2-getti e coomologia 1-dimensionale a coefficienti nel fascio delle funzioni a gradiente parallelo, Rend.Acc.Sc.Fis.Mat. Soc.Naz.Sc.Arti, Napoli,IV, XLIII, 1976.

[11] MASTROGIACOMO P. Coomologia dei campi di getti e coomologia dei campi di tensori covarianti su una varie_ tà a connessione lineare, Le Matematiche,Vol. XXXI,Fasc. II, 1976.

[12] SCHAUTEN J.A. Ricci Calculus, Springer-Verlag,Berlino,1954.

[13] TALLINI G. Introduzione alla coomologia a coefficienti in un fascio, Confer.Sem.Mat.,(117),Bari,1969

[14] TALLINI G. Una dimostrazione del teorema di De Rham, Con_ fer.Sem.Mat.,(139),Bari, 1975.

[15] YANO K. BOCHNER S. Curvature and Betti numbers, Princeton, Uni_ versity Press, 1953.