Summary

The non-existence is proved of a factorization of a semigroup S, *in the form* $S = AB$ *where* A *is a arbitrary semigroup and* B *is a zeroleft semigroup (or* A *is a zeroright semigroup and* B *is arbitrary).*

The only factorization by means of zerosemigroups is charachterized.

ALCUNI RISULTATI SULLA FATTORIZZAZIONE DI SEMIGRUPPI

F.Catino M.R.Dell'Anna M.M.Miccoli(*)

Ricordiamo che un semigruppo moltiplicativo S è detto <u>fattorizzabile</u> se e solo se esistono sottosemigruppi propri A e B di S tali che $S = AB$. Se questo è possibile, AB è detta una <u>fattorizzazione</u> di S con primo fattore A e secondo fattore B.

E' stato considerato il seguente problema:
dati A e B elementi delle classi di semigruppi P e Q, rispettivamente, (P e Q non necessariamente distinte) esiste un semigruppo S fattorizzabile con primo fattore A e secondo fattore B?

E' stato esaminato il caso in cui almeno una delle classi P e Q è la classe dei semigruppi zero sinistri o destri e sono state caratterizzate le fattorizzazioni con zero semigruppi.

<u>Teorema I</u>

Non esiste alcuni semigruppo S fattorizzabile come $S = AB$, dove il secondo fattore B [primo fattore A] è un semigruppo zero sinistro [destro].

Dim.

Per assurdo esista un semigruppo S con una fattorizzazione AB con B semigruppo zero sinistro. Considerato un qualsiasi elemento $s = ab \in S$ $(a \in A, b \in B)$, essendo B un semigruppo zero sinistro

$$sB = (ab)B = a(bB) = ab = s$$

in particolare $aB = a$ per ogni $a \in A$, quindi $AB = A$, in contraddizione con l'ipotesi $A \subset S$.
Analogamente se A è un semigruppo zero destro.

<u>Corollario I</u>

Non esiste alcuna fattorizzazione di un semigruppo S in cui almeno uno dei due

---

(*) Gli autori sono laureandi in Matematica presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Lecce.

fattori ha ordine I.

Dim.

Per assurdo esista un semigruppo fattorizzabile $S = AB$ in cui almeno uno dei due fattori abbia ordine I, sia esso A; allora A è un semigruppo zero destro, in contraddizione col Teor. I.

Il teorema seguente è un tentativo di generalizzazione del Teor. I,

Teorema 2

Non esiste alcun semigruppo S fattorizzabile come $S = AB$, dove A contiene unità sinistra e B contiene un sottosemigruppo zero sinistro B' non costituito da un solo elemento e con unità destra w per B.

Dim.

Per assurdo esista un semigruppo fattorizzabile : $S = AB$ con A e B soddisfacente le condizioni dell'enunciato. Allora w è una unità per S e quindi per ogni $b \in B'$, $b = bw = wb = w$

in contraddizione con l'ipotesi che B' non sia costituito da un solo elemento.

Vale il duale del Teor. 2:

Non esiste alcun semigruppo fattorizzabile come $S = AB$, dove A contiene un sottosemigruppo zero destro A' non costituito da un solo elemento e con unità sinistra per A e B contiene unità destra.

Dim. (Analoga alla precedente).

Osservazione I

Semigruppi che godono delle proprietà di B del Teor. 2 sono i gruppi sinistri, eccetto i gruppi.

Osservazione 2

Nel Teor. 2, l'ipotesi che A contenga unità sinistra è essenziale. Infatti il semigruppo S

	0	a	b	c	d
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	c	c
b	0	b	b	d	d
c	0	c	c	a	a
d	0	d	d	b	b

è fattorizzabile come $S = AB$, dove $A = \{0,a,b\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$.

Lemma I

Dati due semigruppi, A con unità destra e B con unità sinistra, esiste un semigruppo $S = AB$.

Dim.

E' Immediata, dal Teor. 5.I di [I].

Dal Teor. I discende che una fattorizzazione di un semigruppo mediante zero semigruppi deve necessariamente avere come primo fattore un semigruppo zero sinistro e come secondo fattore un semigruppo zero destro. Inoltre vale il

Teorema 3

Dati A e B semigruppi zero sinistro e zero destro, rispettivamente, esiste un semigruppo $S = AB$.

Dim.

Immediata dal Lemma I.

Proposizione I

Se S è un semigruppo e $S = AB$, con A sottosemigruppo zero sinistro e B sottosemigruppo zero destro, valgono le seguenti proprietà:

1) S è idempotente

2) S è senza zero

3) S è semplice

4) ogni idempotente di S è primitivo

5) per ogni $s \in S$ $\quad sSs = s$

Dim.

Notiamo che

per ogni $\quad a \in A$ e $b \in B \qquad aSSb = ab (°)$

infatti $\qquad aSSb \subseteq aSb = a(AB)b = (aA)(Bb) = ab$

d'altra parte $\qquad ab = (aa)(bb) = a(ab)b \in aSSb.$

1) Sia $s = ab \in S$ allora per la (°)

$$ss = (ab)(ab) = a(ba)b = ab = s$$

2) Per assurdo S abbia zero e sia $0 = a'b'$,

per ogni $\quad s = ab \in S \quad s = ab = (aa')(b'b) = a(a'b')b = a0b = 0$

quindi S avendo un solo elemento non è fattorizzabile perché non contiene sottosemigruppi propri, in contraddizione con l'ipotesi.

4) Sia $s = ab \in S$, $(a \in A,\ b \in B)$ per ogni $s' = a'b' \in S$ $(a' \in A, b' \in B)$

$$a'b' \leq ab \Longleftrightarrow (a'b')(ab) = (ab)(a'b') = a'b' \Longleftrightarrow a'(b'a)b =$$
$$= a(ba')b' = a'b' \Longleftrightarrow a'b = ab' = a'b'$$

inoltre, essendo S idempotente,

$$a'b' = (ab')(a'b) = a(b'a')b = ab$$

perciò $s = ab$ è un idempotente primitivo.

3) Per ogni $s \in S$ $s = ab$ $(a \in A,\ b \in B)$, applicando ripetutamente la (°), si ha

$$SsS = (AB)ab(AB) = (aBab)AB = AbAB = AB = S$$

5) Sia $s \in S$, $\quad s = ab$ $(a \in A,\ b \in B)$

$$sSs = (ab)AB(ab) = a(bABa)b = ab = s\ .$$

<u>Teorema 4</u>

Un semigruppo S è fattorizzabile come $S = AB$, con A semigruppo zero sinistro e B semigruppo zero destro se e solo se S è completamente semplice non banale(né gruppo destro né gruppo sinistro) ed esiste un idempotente k tale che

$$kSk = k.$$

Dim.

Sia $S = AB$ con A semigruppo zero sinistro e B semigruppo zero destro, proviamo che esiste una fattorizzazione di S con primo fattore L, ideale minimale sinistro, e secondo fattore R, ideale minimale destro. S per 3) e 4) della Prop.I, è completamente semplice e inoltre, se k è un idempotente di S, $L = Sk$ è un ideale minimale sinistro di S, $R = kS$ è un ideale minimale destro di S e

$$LR = SkkS = ABkkAB = A(BkkA)B = AB = S$$

Quindi poiché S è senza zero e $S = LR$, per il Teor. 3.3.I di [I], S è completamente semplice non banale, inoltre per la 5) della Prop. I, esiste un idempotente k di S tale che $kSk = k$.

Viceversa, per il Teor. 3.3.I di [I], considerato l'idempotente k di S tale che $kSk = k$, $S = AB$ con $A = Sk$ ideale minimale sinistro e $B = kS$ ideale minimale destro. Inoltre A è un semigruppo zero sinistro, infatti per ogni

$$a = sk \in A \ (s \in S) \ aA = (sk)Sk = s(kSk) = sk = a$$

Analogamente si dimostra che B è un semigruppo zero destro.

Teorema 5

Sia S un semigruppo completamente semplice non banale con un idempotente k tale che $kSk = k$. S è fattorizzabile, come $S = AB$, se e solo se $A \cap R \neq \emptyset$ per ogni ideale minimale destro R di S, e $B \cap L \neq \emptyset$ per ogni ideale minimale sinistro L di S.

Dim.

Per il corollario 2.49 p. 78 [2], S è unione disgiunta di ideali minimali destri [sinistri]. Se $S = AB$, $A \cap R \neq \emptyset$ per ogni ideale minimale destro R perché, se esistesse R' tale che $A \cap R' = \emptyset$ posto $S' = S \setminus R'$, si avrebbe $S = AB \subseteq S' S \subseteq S'$ e quindi $S = S'$, in contraddizione con fatto che $S' \subset S$.

Analogamente per B.

Viceversa. Si deve provare che per ogni $s \in S$ esiste $a \in A$ e esiste $b \in B$ tale che $s = ab$. Sia $s \in S$, per 2.49 p.78 [2], esistono L ideale minimale sinistro ed R ideale minimale destro tali che $s \in R$ e $s \in L$, allora, per 2.31 p. 69 [2], $R=sS$ e $L=Ss$. Quindi, dati $a \in A \cap R$ e $b \in B \cap L$, $ab \in RL$ ma, per il Teor. 4 e la Prop. I, $RL=sSSs \subseteq sSs$, perciò $ab = s$.

Osservazione 3

Si dimostra che il sottosemigruppo A[B] del teorema precedente è unione disgiunta di suoi sottosemigruppi zero destri sinistri, i quali sono anche ideali sinistri[destri] di A[B] .

Osservazione 4

Nella dimostrazione del Teor. 5 l'ipotesi che A, B sono sottosemigruppi di S non è necessaria.

Gli autori esprimono viva gratidudine al Prof. F. Migliorini per aver suggerito la ricerca e per il suo costante incoraggiamento.

B I B L I O G R A F I A

[1] Tolo,K — *Factorizable semigroups*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 31,No.2,1969 pp.523-535.

[2] Clifford,A.H.- Preston G.B. — *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Providence, Amer. Math. Soc., 1961.