

P A R T E III

TEORIA DELL'ESTENSIONE DELLE FTG.

III.1 Il concetto di estensione delle FTG: alcune proprietà generali.

Le FTG studiate in precedenza (di ordine 3,4 e 6), pur mostrando un gran numero di interessanti proprietà, rappresentano delle funzioni ellittiche molto particolari (quelle in cui uno dei due invarianti è nullo): e la cosa è da aspettarsi, perché la definizione delle FTG di un certo ordine non contiene alcun parametro, e quindi può rappresentare una funzione, ma non una classe di funzioni (dipendenti, appunto, da un parametro oltre che dall'argomento vero e proprio). Limitandosi alla classe delle funzioni ellittiche riconducibili ad una  $\wp_u$  di Weierstrass con invarianti reali <sup>48)</sup>, è spontaneo chiedersi se non sia possibile, per così dire, "estendere" le FTG di ordine  $n$  (ove per  $n$  si considerano solo i valori 3, 4 e 6), facendole dipendere da un parametro aggiuntivo e reale  $\lambda$ , in modo da descrivere, tramite tali funzioni, la classe suddetta (naturalmente, il parametro aggiuntivo delle  $\wp_u$  potrà sempre essere espresso in funzione di  $\lambda$ ). Si cercherà ovviamente di conservare per le FTG estese, per quanto è possibile, l'analogia con le FTG ordinarie: queste ultime dovranno essere ottenute in corrispondenza di un particolare valore di  $\lambda$ , che, senza perdita di generalità, si può sempre supporre  $\lambda = 0$ .

Le FTG estese saranno indicate con i simboli  $A_n(x|\lambda)$ ,  $T_n(x|\lambda)$ ,  $S_n(x|\lambda)$ ; naturalmente, una volta fissato l'ordine  $n$ , la sua indicazione potrà essere soppressa, e lo stesso discorso vale per gli argomenti, come del resto è stato ripetutamente fatto nelle trattazioni precedenti.

Per definire la procedura di estensione, si inizierà col supporre (fissato  $n$ ) che le funzioni  $A$  e  $T$  soddisfino la seguente generalizzazione della (2):

$$Q(A,T) = A^n + T^n + \lambda F(A,T) = 1 \quad (91)$$

---

(48) Per tali  $\wp_u$  il parametro addizionale da cui esse dipendono può essere sempre definito in modo da risultare reale.

ove  $F(A,T)$  è una funzione di  $A$  e  $T$  (che può eventualmente dipendere anche da  $\lambda$  in modo esplicito): essa, per mantenere le principali proprietà di simmetria caratteristiche alle FTG, si suppone simmetrica in  $A$  e  $T$ :

$$F(A,T) = F(T,A) \quad (92)$$

e, per conservare la condizione  $A(0) = 0, T(0) = 1$ , deve verificare la relazione:

$$F(0,1) = F(1,0) = 0 \quad (93)$$

Come già detto, per  $\lambda = 0$  le FTG estese devono riprodurre le FTG ordinarie.

Derivando le (91) rispetto a  $x$ , si ottiene

$$\left( n A^{n-1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial A} \right) A' + \left( n T^{n-1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial T} \right) T' = 0 \quad (94)$$

La (94) è compatibile con la seguente generalizzazione del sistema differenziale (4):

$$A' = T^{n-1} + \frac{\lambda}{n} \frac{\partial F}{\partial T} \quad (95)$$

$$T' = - \left( A^{n-1} + \frac{\lambda}{n} \frac{\partial F}{\partial A} \right)$$

Quando le FTG estese soddisfano il sistema (95) si dice che l'estensione è semplice.

C'è tuttavia un altro modo di generalizzare il sistema (4): partendo infatti dal caso di una variabile reale, si può nuovamente utilizzare la definizione data all'inizio del §I.1, assumendo come curva parametrica nel piano  $\xi\eta$  (al posto della  $\xi^n + \eta^n = 1$ ) la  $Q(\eta,\xi) = 1$ , che, per le ipotesi (92) e (93), passa ancora per i punti  $(1,0)$  ed  $(0,1)$  ed è simmetrica rispetto alla retta

$\eta - \xi = 0$ .<sup>49)</sup> E' utile tuttavia introdurre in tale definizione una possibilità in più, ammettendo che l'area del settore ivi menzionato non debba essere necessariamente  $\frac{1}{2} x$ , ma sia data da  $\frac{1}{2} a(x)$ , ove  $a(x)$  è un'opportuna funzione da determinare (che deve ovviamente dipendere da  $\lambda$  e ridursi a  $x$  per  $\lambda = 0$ , e soddisfare comunque la condizione  $a(0) = 0$ ). Un'estensione delle FTG per cui si abbia  $a(x) = x$ , si dice che "conserva le aree"; altrimenti, che "non conserva le aree". Il sistema (9) a cui applicare il teorema di Dini si generalizza nella seguente maniera:

$$Q(A, T) = 1$$

$$\frac{1}{2} AT + \int_T^1 \eta(\xi) d\xi = \frac{1}{2} a(x)$$

Applicando il teorema di Dini e ricordando che  $\eta(T) = A$  si ottiene<sup>50)</sup>

$$\frac{dA}{dx} = \frac{da}{dx} \frac{\frac{\partial Q}{\partial T}}{A \frac{\partial Q}{\partial A} + T \frac{\partial Q}{\partial T}}$$

$$\frac{dT}{dx} = - \frac{da}{dx} \frac{\frac{\partial Q}{\partial A}}{A \frac{\partial Q}{\partial A} + T \frac{\partial Q}{\partial T}}$$

(96)

Introducendo nelle (96) l'espressione (91) per  $Q$  si ottiene:

49) Naturalmente per l'applicabilità di tale definizione occorre che  $F(A, T)$  sia tale che l'area del settore richiamato nella definizione stessa sia definita: si supporrà che  $F$  permetta sempre di soddisfare tale requisito. Se la curva  $Q(\eta, \xi) = 1$  non presenta asintoti nel primo quadrante, è possibile definire una costante  $m(\lambda)$  che gioca il ruolo di  $m$  per le FTG estese, e che si riduce a  $m$  per  $\lambda = 0$ .

50) Ovviamente non possono essere presi come punti soluzione gli eventuali valori di  $x$  per cui  $A \frac{\partial Q}{\partial A} + T \frac{\partial Q}{\partial T} = 0$ .

$$\frac{dA}{dx} = \frac{da}{dx} \frac{T^{n-1} + \frac{\lambda}{n} \frac{\partial F}{\partial T}}{1 - \lambda \left[ F - \frac{1}{n} \left( A \frac{\partial F}{\partial A} + T \frac{\partial F}{\partial T} \right) \right]}$$

(97)

$$\frac{dT}{dx} = - \frac{da}{dx} \frac{A^{n-1} + \frac{\lambda}{n} \frac{\partial F}{\partial A}}{1 - \lambda \left[ F - \frac{1}{n} \left( A \frac{\partial F}{\partial A} + T \frac{\partial F}{\partial T} \right) \right]}$$

Dalle (97) si vede subito che un'estensione che non conserva le aree può sempre essere resa semplice scegliendo (qualunque sia  $F$ )

$$a(x) = x - \lambda \int_0^x \left[ F - \frac{1}{n} \left( A \frac{\partial F}{\partial A} + T \frac{\partial F}{\partial T} \right) \right] dx \quad (98)$$

Inoltre dalle (96) o dalle (97) è immediato concludere che, affinché un'estensione delle FTG sia semplice e conservi le aree,  $Q$  (e quindi  $F$ ) deve essere una funzione omogenea di grado  $n$  in  $A$  e  $T$ . E' chiaro che, per quanto possibile, sarà sempre questo il tipo di estensione che si cercherà di realizzare.

Un altro risultato interessante è che i tipi particolari di estensione sopra considerati conservano alcune relazioni differenziali valide per le FTG ordinarie. In particolare, tutte le volte che l'estensione è semplice e  $F$  dipende da  $A$  e  $T$  solo attraverso la combinazione  $A + T$ , si mantiene la relazione:

$$\frac{d}{dx} (A+T) = T^{n-1} - A^{n-1} \quad (99)$$

mentre, se l'estensione conserva le aree, vale la relazione

$$T \frac{dA}{dx} - A \frac{dT}{dx} = 1 \quad (100)$$

come è immediato controllare dalle (96) con  $\frac{da}{dx} = 1$ . Questo ha per conseguenu

za immediata che vengono mantenute le due relazioni (10):

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{T^2}; \quad \frac{d(1/S)}{dx} = -\frac{1}{A^2} \quad (101)$$

che sono caratteristiche di tale tipo di estensione.

### III.2 L'estensione delle funzioni di ordine 4.

Cominciamo a trattare il caso delle funzioni di ordine 4, perché, come si vedrà in seguito, per esse è immediato trovare un'elegante estensione semplice e che conserva le aree, mediate la quale può essere rappresentata l'intera classe delle funzioni ellittiche, e, in particolare, in maniera più diretta la sotto classe delle  $\wp$  a invarianti reali e discriminante negativo [a cui appartiene la  $\wp(u|1,0)$ ]. Conviene partire dalle espressioni delle FTG in termini delle funzioni di Jacobi, e più precisamente dalle relazioni (70) e (72) che, dal punto di vista del procedimento di estensione, possono essere considerate come equivalenti, in quanto (come già fatto notare) esse sono uguali per qualunque  $k^2$ . Generalizziamo dunque la (72) inserendovi le funzioni di Jacobi con parametro  $k^2$  qualsiasi (purché reale), e giungendo alla definizione:

$$S(x|\lambda) = \frac{\operatorname{sn}(x, k^2) \operatorname{dn}(x, k^2)}{\operatorname{cn}(x, k^2)} \quad (102)$$

ove il legame tra  $\lambda$  e  $k^2$  (soddisfacente la condizione  $\lambda(k^2 = 1/2) = 0$ ) deve ancora essere determinato.

Vediamo ora se esiste un'estensione, basata sulla (102), che conservi le aree. In tale caso, si deve avere

$$T^2 = 1/S' = \frac{\operatorname{cn}^2 x}{k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^4 x} = \frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{cn}^2 x}$$

$$A^2 = 1/\left(\frac{1}{S}\right)' = \frac{\text{sn}^2 x \text{dn}^2 x}{k'^2 + k^2 \text{cn}^4 x} = \frac{\text{sn}^2 x \text{dn}^2 x}{\text{dn}^2 x - k^2 \text{sn}^2 x \text{cn}^2 x} \quad (103)$$

L'estrazione della radice quadrata nelle (103), allo scopo di ricavare A e T, va fatta con le stesse modalità già descritte per le FTG ordinarie.

Derivando le (103) rispetto a x si ottiene, dopo alcuni passaggi:

$$2TT' = -2 \frac{\text{sn} x \text{dn} x \text{cn} x [\text{sn}^2 x \text{dn}^2 x + (k'^2 - k^2) \text{cn}^2 x]}{(k'^2 + k^2 \text{cn}^4 x)^2}$$

$$2AA' = 2 \frac{\text{sn} x \text{dn} x \text{cn} x [\text{cn}^2 x + (k'^2 - k^2) \text{sn}^2 x \text{dn}^2 x]}{(k'^2 + k^2 \text{cn}^4 x)}$$

che, confrontate con le (103) forniscono

$$A' = T^3 + \lambda T A^2 \quad (104)$$

$$T' = -(A^3 + \lambda A T^2)$$

ove si è posto

$$\lambda = k'^2 - k^2 = 1 - 2k^2 \quad (104')$$

che, come deve, si annulla quando  $k^2 = \frac{1}{2}$ .

La relazione che sostituisce la (54) si ottiene immediatamente dalla (100), inserendovi le (104), e risulta

$$T^4 + A^4 - 2\lambda A^2 T^2 = 1 \quad (105)$$

Come si vede, la funzione aggiuntiva  $F(A,T) = 2A^2 T^2$ , che chiaramente soddisfa le proprietà (92) e (93), è omogenea di grado 4 in A e T, e

quindi dà luogo ad un'estensione semplice (come è anche comprovato dall'aspetto del sistema (104)) e che conserva le aree. Si noti che la  $F$  trovata è la più semplice funzione soddisfacente tutte queste proprietà.

Prima di studiare in maggior dettaglio il comportamento delle funzioni trovate, vediamo di stabilire a quale classe di funzioni di Weierstrass  $\Phi_u$  a invarianti reali esse possono essere collegate quando  $\lambda$  è reale.

Come già fatto nella Parte II, verranno considerate equivalenti tutte le funzioni  $\Phi_u$  che possono essere ricondotte l'una all'altra attraverso la relazione di omogeneità (32). È evidente che ciò accade per tutte le  $\Phi_u$  i cui invarianti  $g_2$  e  $g_3$  soddisfano la relazione  $\frac{g_3^3}{g_2^3} = \text{costante}$  (reale). Al posto di questo rapporto si può considerare, con TRICOMI, il cosiddetto "invariante assoluto"  $J$ , definito da

$$J = \frac{1}{1 - 27g_3^2/g_2^3} \quad (106)$$

È anche chiaro che, essendo per le  $\Phi_u$  a invarianti reali  $e_2$  sempre reale, e quindi  $\text{Im } e_1 = -\text{Im } e_3$  (51), dalle (67) segue che la realtà di  $\lambda$  implica la realtà di tutti e tre gli invarianti irrazionali, e quindi richiede che il discriminante  $\Delta = -g_2^3/27J$  sia negativo. Nella Fig. 15 è mostrato il piano cartesiano delle due quantità  $g_2$  e  $g_3$ , con l'indicazione di alcune curve  $J = \text{cost}$ , che presentano nell'origine una tipica cuspidè: nei casi particolari  $J = 1 (g_3=0)$  e  $J = 0 (g_2=0)$  tali curve si identificano con i due assi coordinati. La curva corrispondente a  $J = \pm \infty (g_3^2 = g_2^3/27)$  corrisponde a funzioni ellittiche degeneri (con  $\Delta = 0$ ), e, come è facile vedere, separa la zona delle  $\Phi_u$  con  $\Delta$  positivo da quella con  $\Delta$  negativo

---

51) Questa proprietà segue dalla relazione  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ , che lega tra loro i tre invarianti (v. TRICOMI, testo citato).

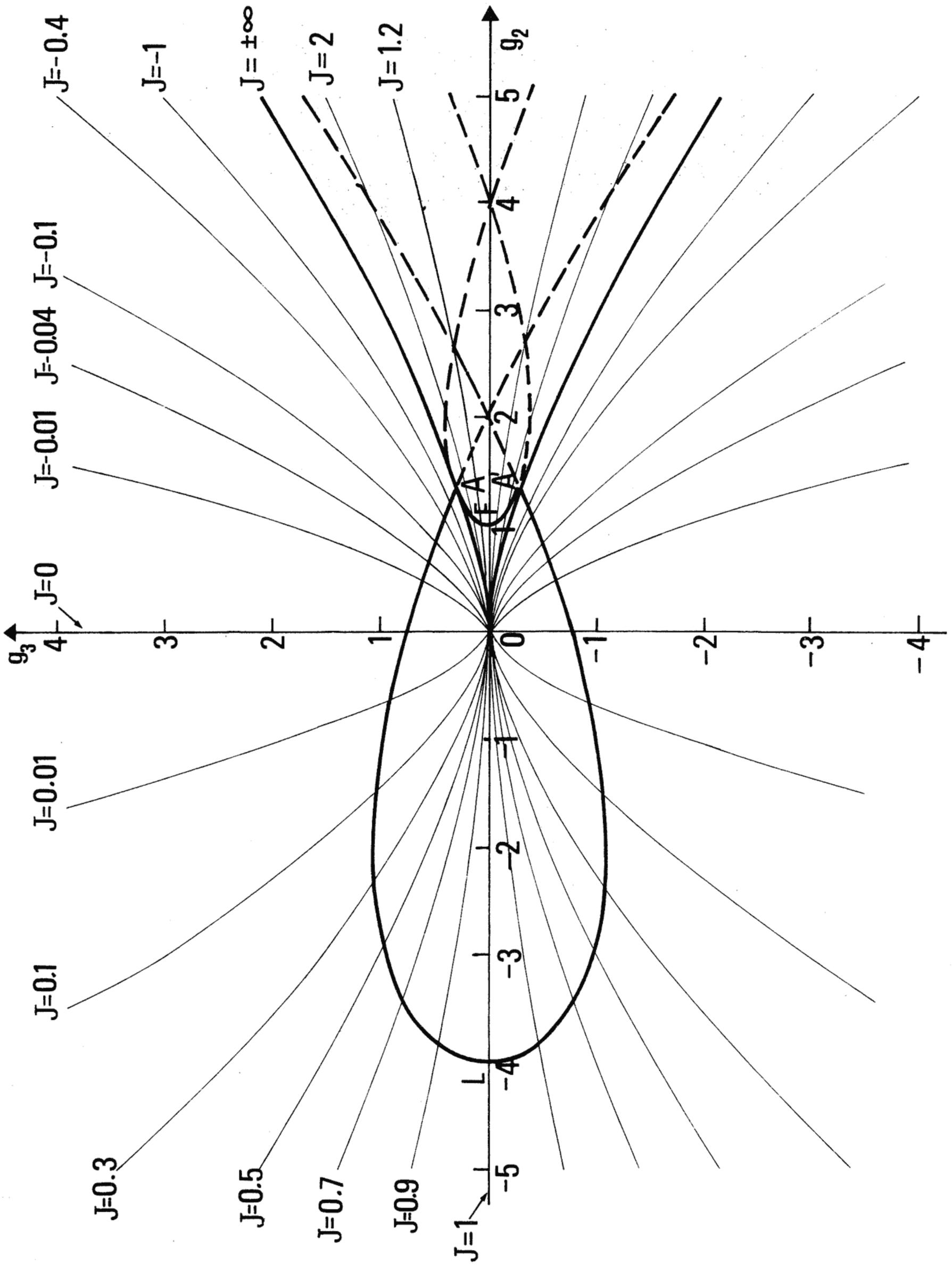


fig.15

(interamente giacente nel semipiano  $g_2 > 0$ ). Sono proprio le  $\mathcal{P}_u$  con gli invarianti che cadono in quest'ultima regione che si possono associare alle funzioni studiate in questo paragrafo, con l'aggiunta del semiasse negativo delle  $g_2$  che fa parte della curva  $J=1$ : di fatto le  $\mathcal{P}_u$  associabili alle FTG di ordine 4 estese e con  $\lambda$  reale richiedono che sia  $J \geq 1$ .

Tuttavia, come è facile accertare, l'associazione tra le  $\mathcal{P}_u$  con invarianti irrazionali reali e le FTG estese di ordine 4 non è biunivoca, perché non lo è quella tra funzioni di Weierstrass con  $J$  costante e funzioni di Jacobi. Infatti dalla teoria delle trasformazioni delle funzioni ellittiche (descritta in un apposito capitolo del più volte citato testo di TRICOMI) si sa che ad un valore di  $J$  corrispondono sei valori di  $k^2$ , correlati fra loro, e precisamente

$$k^2; 1-k^2; \frac{1}{k^2}; \frac{k^2-1}{k^2}; \frac{1}{1-k^2}; \frac{k^2}{k^2-1} \quad (107)$$

tali che le corrispondenti funzioni di Jacobi vanno le une nelle altre sotto una trasformazione di 1° ordine nei periodi (che lascia invariata la  $\mathcal{P}_u$ ). I sei valori (107) hanno numerose proprietà interessanti: per esempio, presa una qualsiasi coppia di essi, gli altri quattro valori possono sempre disporsi in due coppie con la stessa relazione funzionale della prima. In particolare, è possibile raggruppare i sei valori (107) in tre coppie di termini la cui somma dia 1. Inoltre, quando  $k^2$  varia tra 0 e  $\frac{1}{2}$ , i sei valori (107) coprono tutto l'asse reale senza sovrapporsi, rimanendo cioè compresi nei sei intervalli in cui l'asse reale è diviso dai valori di  $k^2$  relativi ai due casi speciali delle funzioni di Jacobi degeneri ( $k^2 = 0, 1, \pm \infty$ ) e delle funzioni lemniscatiche con  $g_3 = 0$  ( $k^2 = \frac{1}{2}, 2, -1$ ). Sono questi i soli casi in cui, per  $k^2$  reale, si ha la coincidenza, a due a due, dei valori (107).

In maniera del tutto parallela si possono portare avanti le stesse considerazioni con riferimento al parametro  $\lambda$  che definisce le FTG estese.

I sei valori corrispondenti ai valori (107) sono

$$\pm \lambda ; \pm \frac{3-\lambda}{1+\lambda} ; \pm \frac{3+\lambda}{1-\lambda} \quad (108)$$

Al variare di  $\lambda$  tra 0 e 1 le (108) coprono tutto l'asse reale, rimanendo confinati negli intervalli delimitati dai "punti di coincidenza"  $+1, -1, \pm \infty$  (caratterizzanti le FTG degeneri) e  $0, +3, -3$  (caratterizzanti le FTG ordinarie). E' chiaro che il legame tra le FTG corrispondenti allo stesso valore di  $J$  ma con  $\lambda$  diverso può essere dedotto a partire dalle trasformazioni delle funzioni di Jacobi sotto il passaggio dell'uno all'altro dei valori (107).

La trasformazione più interessante si ha cambiando segno a  $\lambda$ ; essa corrisponde allo scambio tra  $k^2$  e  $k'^2$ . Sulla base delle formule relative a tale trasformazione, applicate alle (103) con l'opportuna convenzione per l'estrazione della radice quadrata, si ottiene

$$A(x|-\lambda) = -iA(ix|\lambda) \quad (109)$$

$$T(x|-\lambda) = T(ix|\lambda)$$

A controllo delle (109), l'applicazione diretta delle stesse formule alla (102) fornisce

$$S(x|-\lambda) = -iS(ix|\lambda) \quad (110)$$

Le (109) per  $\lambda = 0$  si riducono alle (29) [con  $e = i$ ], e possono essere considerate come l'estensione della proprietà di simmetria per rotazione di  $90^\circ$  caratteristica delle FTG ordinarie, che ora non può più mantenersi perché i due periodi reale e immaginario delle FTG estese non sono uguali. Il cambiamento di segno di  $\lambda$  quindi produce l'effetto di una rotazione di  $90^\circ$  nel piano complesso, e ci si può convincere facilmente che in termini di  $\mathcal{P}$  esso equivale ad un cambiamento di segno di  $g_3$ .

Passando alle altre trasformazioni (108) consideriamo innanzitutto quella con cui si passa da  $\lambda$  a  $\dot{\lambda} = -\frac{3+\lambda}{1-\lambda}$  (la corrispondente trasformazione delle funzioni di Jacobi, con  $\dot{k}^2 = \frac{1}{k^2}$ , mantiene reali gli argomenti reali)<sup>52)</sup>. L'effetto di tale trasformazione si ottiene combinando le suddette formule di trasformazione delle funzioni di Jacobi con le espressioni seguenti, che danno le funzioni di Jacobi in funzione delle FTG estese, e sono deducibili dalle (103):

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 x &= \frac{T^2 + A^2 - 1}{(1-\lambda)T^2} = \frac{1 + A^2 - T^2}{1 + A^2 + \lambda T^2} \\ \operatorname{cn}^2 x &= \frac{1 - A^2 - \lambda T^2}{(1-\lambda)T^2} = \frac{(1+\lambda) T^2}{1 + A^2 + \lambda T^2} \\ \operatorname{dn}^2 x &= \frac{1 + T^2 - A^2}{2T^2} = \frac{1+\lambda}{2} \frac{1+A^2+T^2}{1+A^2+\lambda T^2} \end{aligned} \quad (111)$$

E' sottinteso che nelle (111) il parametro  $k^2$  che specifica le funzioni di Jacobi è legato al parametro  $\lambda$  che specifica le FTG della relazione  $k^2 = \frac{1-\lambda}{2}$ .

Combinando le formule in modo opportuno si ottiene:

---

52) Analogamente a quanto fatto nel TRICOMI, le grandezze trasformate verranno contrassegnate con un punto.

$$\dot{A}^2(x) = A^2(x|\dot{\lambda}) = \frac{\hat{T}^2 + \hat{A}^2 - 1}{2(\hat{T}^2 - \hat{A}^2)}$$

$$\dot{T}^2(x) = T^2(x|\dot{\lambda}) = \frac{\hat{T}^2 + \hat{A}^2 + 1}{2(\hat{T}^2 - \hat{A}^2)}$$

(112)

$$\dot{S}(x) = S(x|\dot{\lambda}) = \frac{\sqrt{2(1-\lambda)} \hat{A} \hat{T}}{\hat{T}^2 + \hat{A}^2 + 1}$$

ove  $\hat{A} = A(\sqrt{\frac{2}{1-\lambda}} x|\lambda)$  (e analoghe), e, come detto,  $\dot{\lambda} = -\frac{3+\lambda}{1-\lambda}$ .

E' facile convincersi che le (112) possono essere usate senza difficoltà nell'intero intervallo di  $\lambda$  da -1 a 1, con il che si copre l'intero intervallo dei valori di  $\dot{\lambda}$  inferiori a -1. Cambiando nelle (112)  $\dot{\lambda}$  in  $-\lambda$  e applicando le (109) si vengono a esprimere le FTG con parametro  $>1$  in termini di funzioni  $\hat{A}$ ,  $\hat{T}$  il cui parametro è  $\lambda$ , e il cui argomento è  $\sqrt{\frac{2}{1-\lambda}} ix$ . Applicando ancora le (109) per eliminare l'immaginario, e combinando nuovamente  $\lambda$  in  $-\lambda$  si ottiene infine:

$$\dot{A}^2(x) = A^2(x|\dot{\lambda}) = \frac{1 - \hat{T}^2 + \hat{A}^2}{2(\hat{A}^2 + \hat{T}^2)}$$

$$\dot{T}^2(x) = T^2(x|\dot{\lambda}) = \frac{1 + \hat{T}^2 - \hat{A}^2}{2(\hat{A}^2 + \hat{T}^2)}$$

(113)

$$\dot{S}(x) = S(x|\dot{\lambda}) = \frac{\sqrt{2(1+\lambda)} \hat{A} \hat{T}}{1 + \hat{T}^2 - \hat{A}^2}$$

ove ora, per effetto delle sostituzioni fatte,  $\dot{\lambda} = \frac{3-\lambda}{1+\lambda}$  e

$\hat{A} = A(\sqrt{\frac{2}{1+\lambda}} x|\lambda)$  e analoghe. <sup>53)</sup>

53) Lo stesso risultato (113) si può ottenere partendo direttamente dalla trasformazione delle funzioni di Jacobi con  $k^2 = k^2/(k^2-1)$ , che porta a questo valore di  $\lambda$ .

In entrambi i casi (112) e (113) è facile controllare che si ha  $\dot{A}^4 + \dot{T}^4 + 2\lambda\dot{A}^2\dot{T}^2 = 1$ , e che sono soddisfatte le proprietà differenziali caratteristiche delle FTG estese.

Le formule trovate permettono quindi di esprimere le FTG con  $\lambda$  reale e di modulo  $> 1$  in termini di quelle con  $\lambda$  reale ( $|\lambda| < 1$ ): a loro volta la (109) lega tra loro queste ultime, così che è sufficiente conoscere le FTG con  $\lambda$  compreso tra 0 e 1 in tutto il piano complesso per determinarne i valori corrispondenti alle altre scelte di  $\lambda$ .

I valori  $\lambda = 1$  e  $\lambda = -1$  (FTG degeneri) corrispondono rispettivamente alle funzioni trigonometriche e iperboliche ordinarie ( $n=2$ ): si può controllare che, introducendo le prime nelle (113) e le seconde nelle (112), le funzioni vanno in loro stesse, come conseguenza del fatto che, per tali casi, si ha  $\dot{\lambda} = \lambda$ .

Poiché (come si vedrà tra poco e come è anche evidente dalle (112)) le funzioni  $A$  e  $T$  con  $\lambda < -1$  hanno delle singolarità (punti di diramazione) sull'asse reale e quindi non sono reali su alcune porzioni di detto asse, può essere ragionevolmente supposto che esse siano

collegate in qualche modo con l'estensione delle funzioni iperboliche generalizzate (FIG), che, per  $\lambda = 0$ , presentano appunto questo andamento. Poiché il problema dell'estensione delle FIG di ordine 4 riveste un notevole interesse nella teoria, esso verrà trattato in maggior dettaglio nel prossimo paragrafo, ove verrà ripresa anche tale questione.

Tornando al comportamento delle FTG estese sull'asse reale, il loro andamento qualitativo può essere seguito in maniera diretta sfruttando la definizione data nel §I.1 che, come già discusso, conserva in questo caso la sua validità. A tale scopo in Fig. 16 è riportato l'andamento delle curva parametrica  $\xi^4 + 2\lambda\xi^2\eta^2 + \eta^4 = 1$  nel primo quadrante del piano  $\xi\eta$  (ciò è sufficiente perché la curva è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi), per alcuni valori tipici di  $\lambda$ . La situazione più interessante si ha per  $\lambda \leq -1$ : in tal caso è facile convincersi che la curva in questione ha degli asintoti nel primo quadrante, e che soltanto il ramo inferiore della curva mostrata in Figura può essere usato nella definizione delle FTG. (Per questa ragione il ramo superiore è stato indicato a tratteggio). Dato che quando  $\lambda < -1$  l'area compresa tra l'asintoto e la curva è finita, ne consegue che le funzioni  $A$  e  $T$  divergono in un punto dell'asse reale, dove, avendo ivi un punto di diramazione, nell'intervallo ad esso successivo ed estendentesi fino alla prossima singolarità non sono più reali, ma immaginarie pure (si confrontino le formule (112), e la discussione di tipo analogo svolta per le funzioni di ordine 5). In ogni caso, quando  $|\lambda| < 1$  la costante  $m(\lambda)$ , legata al periodo reale delle FTG, si identifica con la costante  $K$  data dalla (66); come è riportato nel TRICOMI, il suo valore decresce da  $+\infty$  a  $\frac{\pi}{2}$  quando  $\lambda$  cresce da  $-1$  a  $1$ . Un'analogha quantità  $m'(\lambda) = m(-\lambda) = K'$ , legata nella stessa maniera al periodo immaginario delle funzioni, fa l'opposto. Se invece  $|\lambda| > 1$  le (66) non sono più entrambe direttamente utilizzabili; ci si può però servire delle (112) e (113), le quali mostrano che  $m(\dot{\lambda}) = m(\lambda)\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}$  (a seconda del segno di  $\dot{\lambda}$ ), ove  $\dot{\lambda}$  e  $\lambda$  (con  $|\lambda| < 1$ )

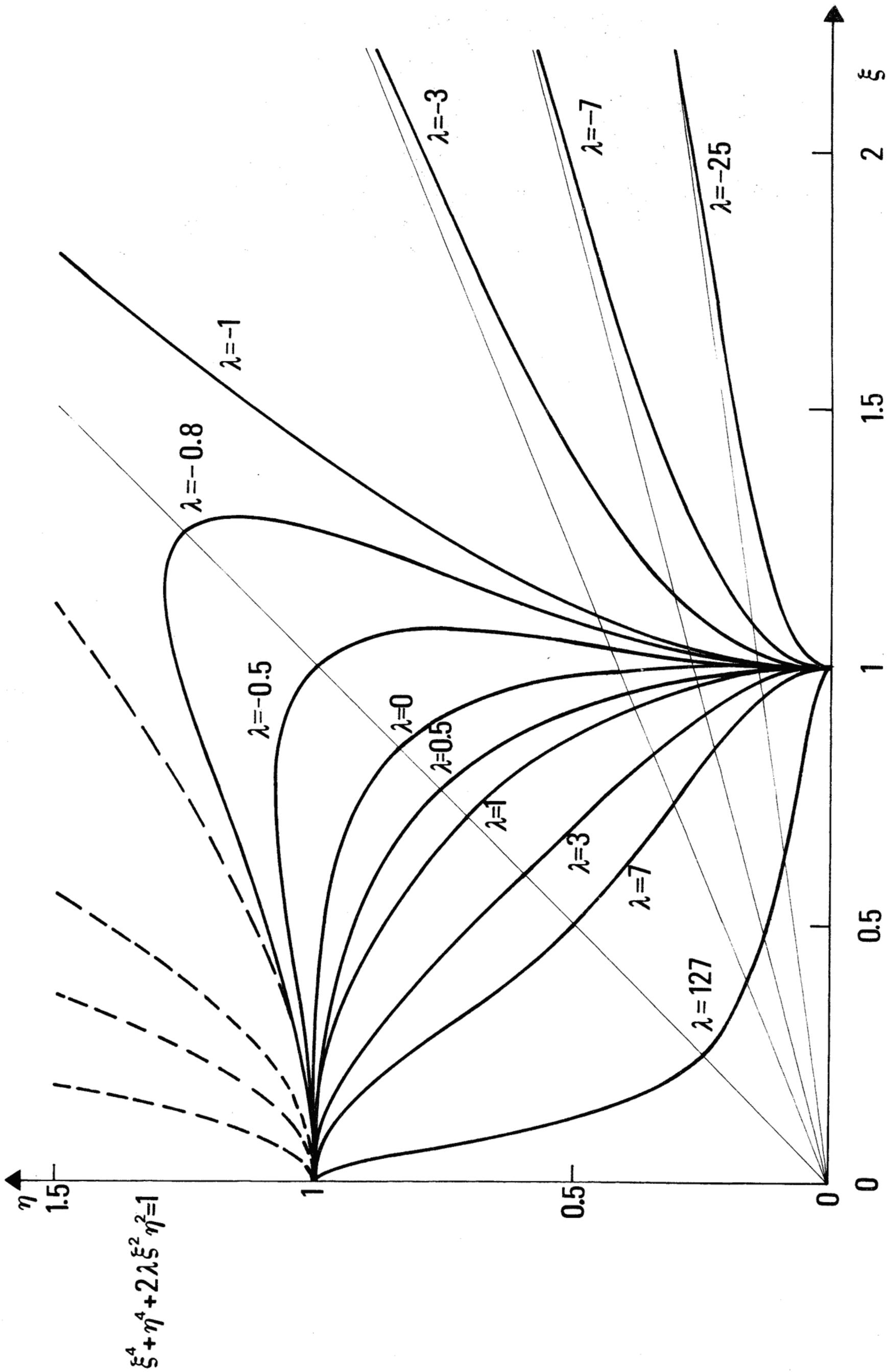


fig.16

sono legati tra loro tramite le espressioni a margine delle formule suddette. Si vede che, per  $|\dot{\lambda}| \geq 1$ ,  $m(\dot{\lambda})$  e  $m'(\dot{\lambda})$  tendono a zero quando  $|\dot{\lambda}| \rightarrow \infty$  con diversa rapidità, "incrociandosi" per  $\dot{\lambda} = \pm 3$ .

L'andamento di  $A(x|\lambda)$  e  $T(x|\lambda)$  sull'asse reale per vari valori di  $\lambda$  è mostrato nelle Figure 17a ( $\lambda \geq 0$ ) e 17b ( $\lambda < 0$ ). In tutti i diagrammi il simbolo  $m$  denota, ovviamente,  $m(\lambda)$ . Si noti che in tutti i diagrammi (eccetto quello per  $\lambda = -1$ ) si è usata la stessa scala, così che risultano in scala anche i periodi delle funzioni. È necessario fare alcuni commenti sui diagrammi di Fig. 17b ( $\lambda < 0$ ). Per  $0 > \lambda > -1$ , le FTG presentano dei caratteristici massimi, assenti per  $\lambda \geq 0$ ;  $T(x|\lambda)$  ha il primo massimo dopo l'origine all'ascissa  $\arcsin(\sqrt{-\lambda})$ <sup>54)</sup>, e ivi vale  $(1-\lambda^2)^{-1/4}$ , mentre  $A$  vale  $\sqrt{-\lambda}(1-\lambda^2)^{-1/4}$ .

All'avvicinarsi di  $\lambda$  a  $-1$ , i massimi in questione diventano sempre più alti e più lontani dall'origine, fino a che, per  $\lambda = -1$ , il periodo reale delle FTG estese diventa infinito e si ricade sulle funzioni iperboliche ordinarie.

Per  $\lambda < -1$  le funzioni  $A$  e  $T$  non sono reali nelle zone ove il loro andamento non è mostrato: è invece sempre reale  $S$ , il cui andamento (di tipo non convenzionale rispetto agli altri casi) è indicato nei corrispondenti diagrammi.

È anche da notare che, per  $\lambda < -1$ , non è più valida la condizione (6), dedotta come conseguenza della simmetria della curva parametrica rispetto alla bisettrice del primo quadrante: infatti in tale caso la curva effettivamente usata non è più simmetrica. Del resto, la cosa risulta anche dalle formule (112).

È anche facile convincersi che, quando  $|\lambda| < 1$ , il comportamento nel piano

---

54) Per  $\lambda$  sufficientemente prossimo a  $-1$  tale punto tende a sovrapporsi a  $\frac{\pi}{2}$ .

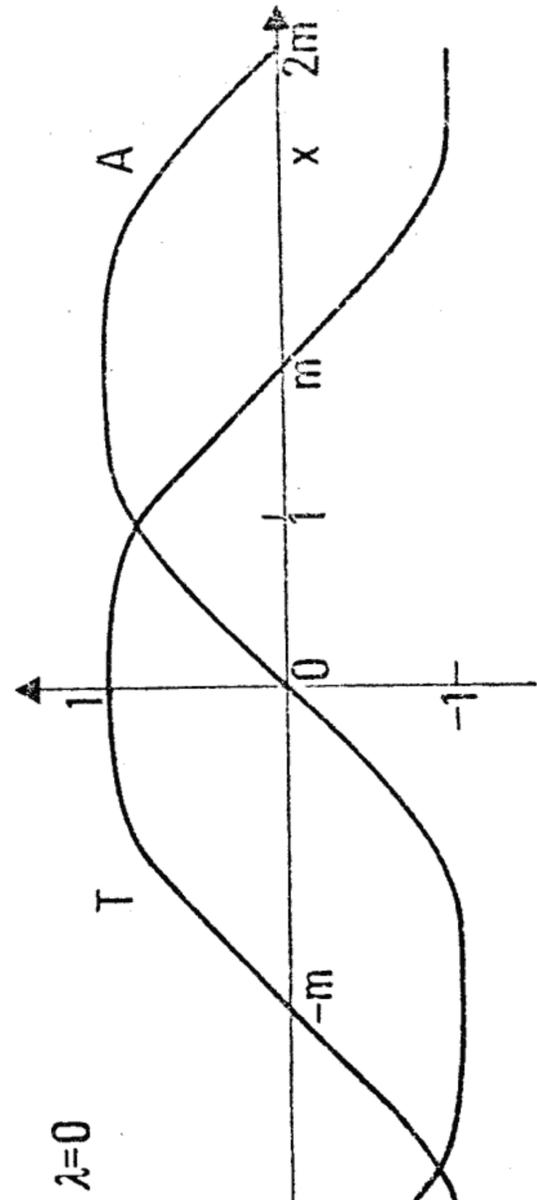
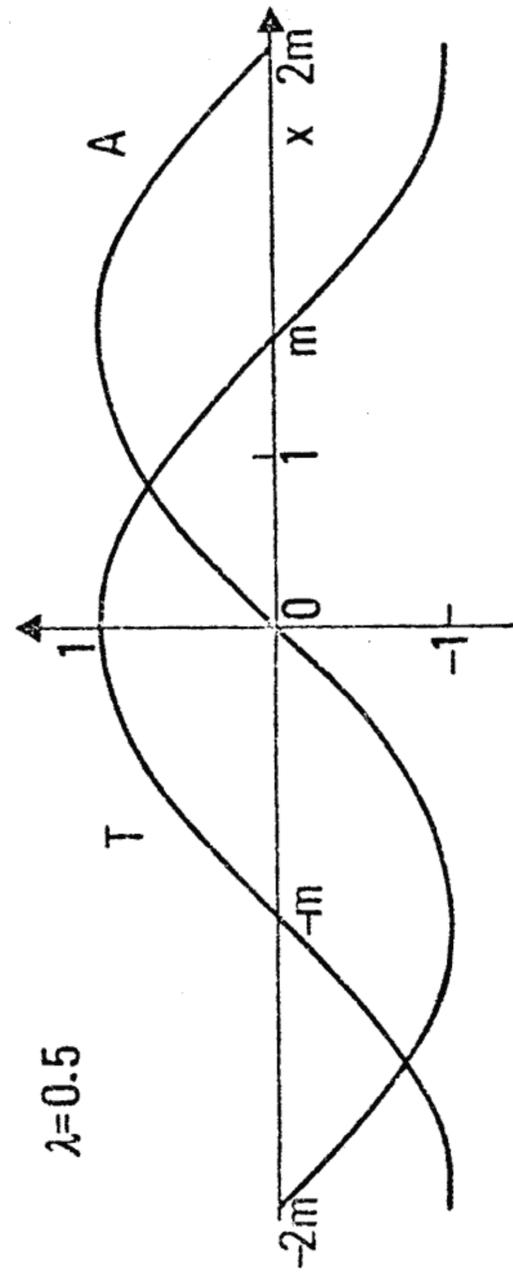
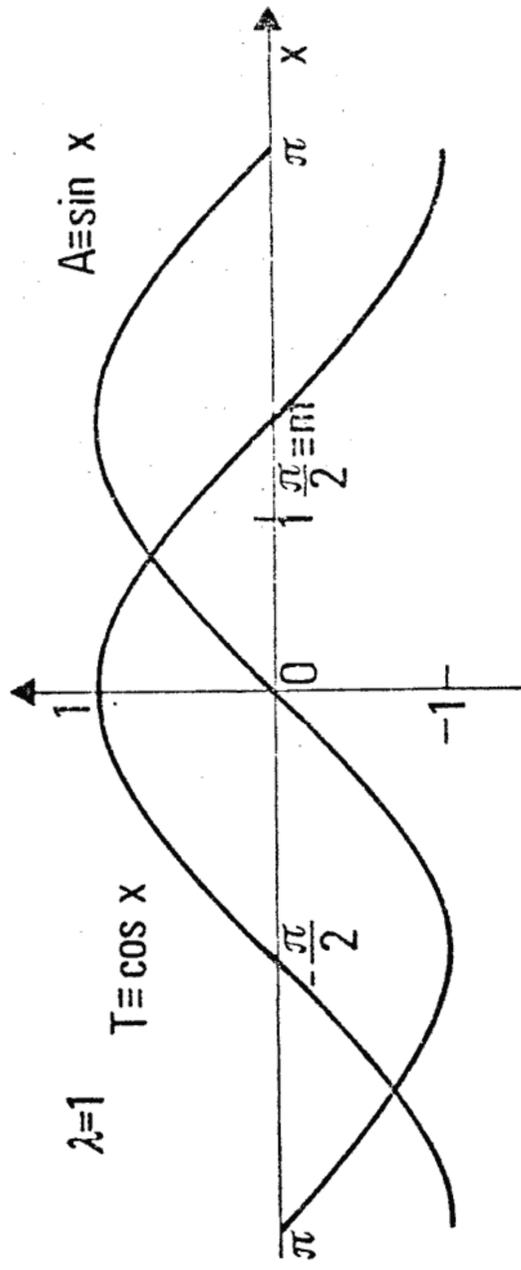
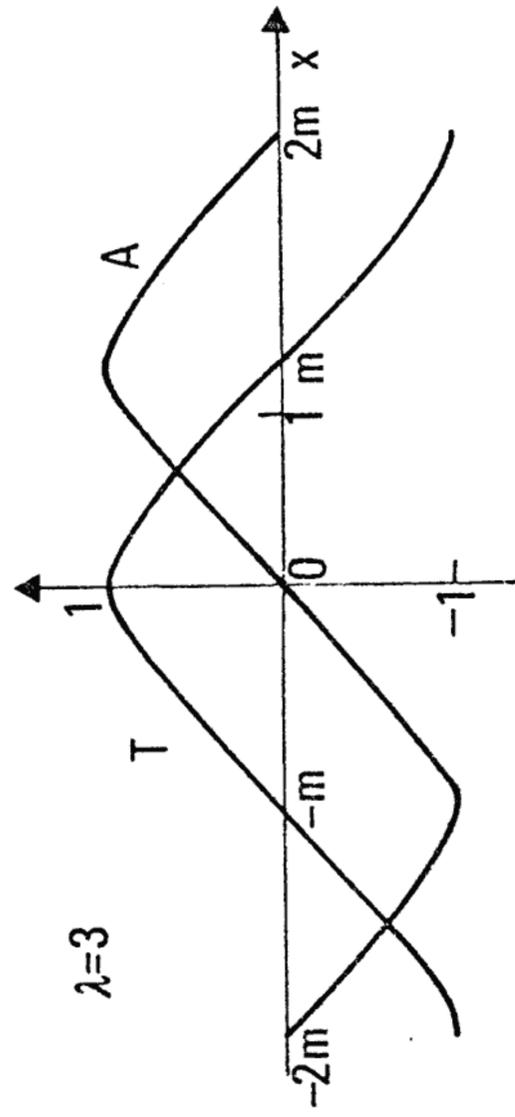
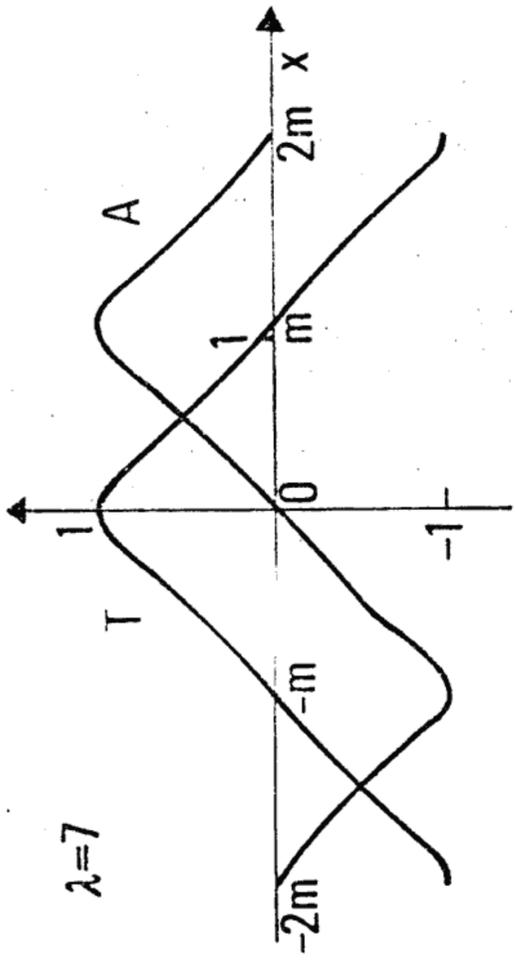
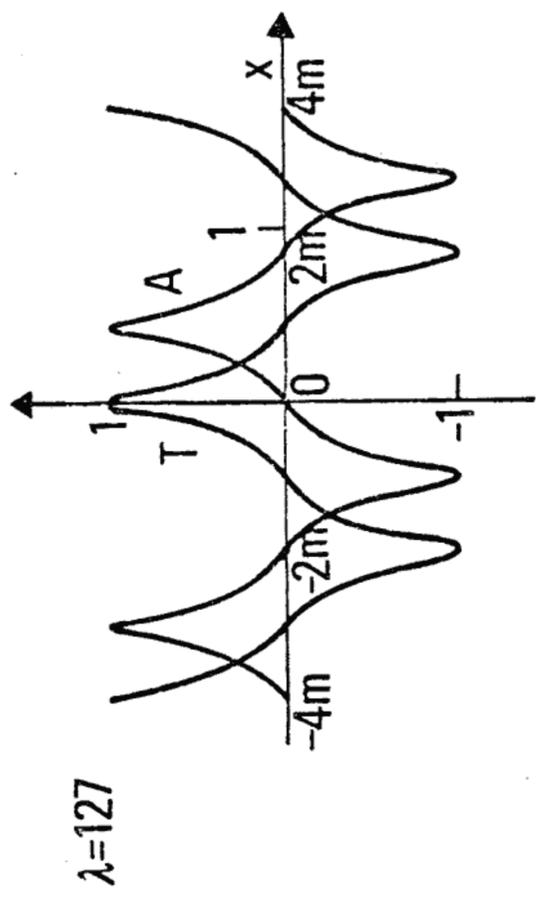


fig. 17a

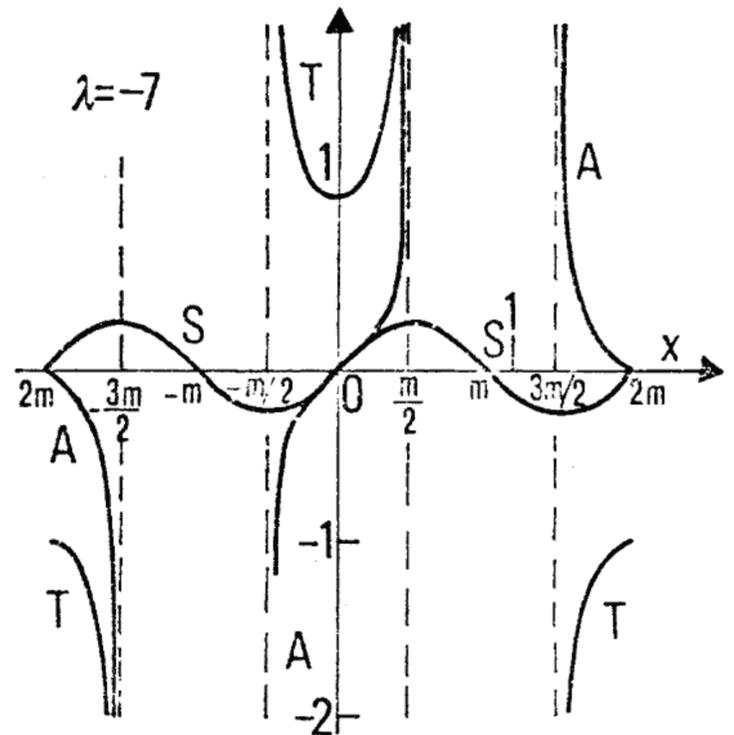
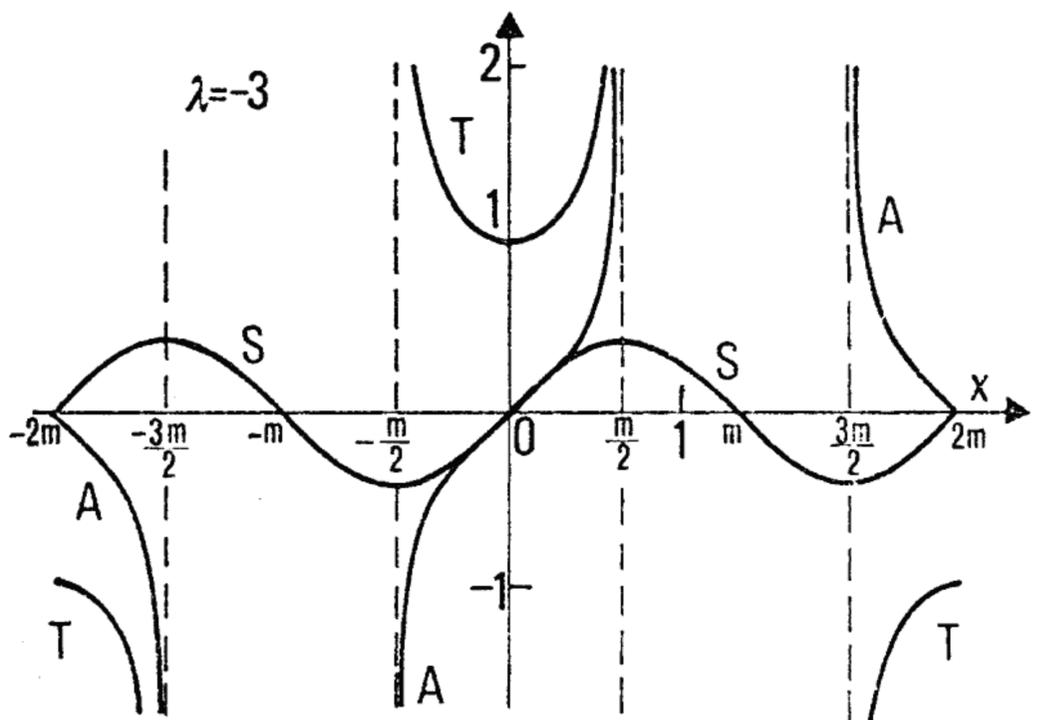
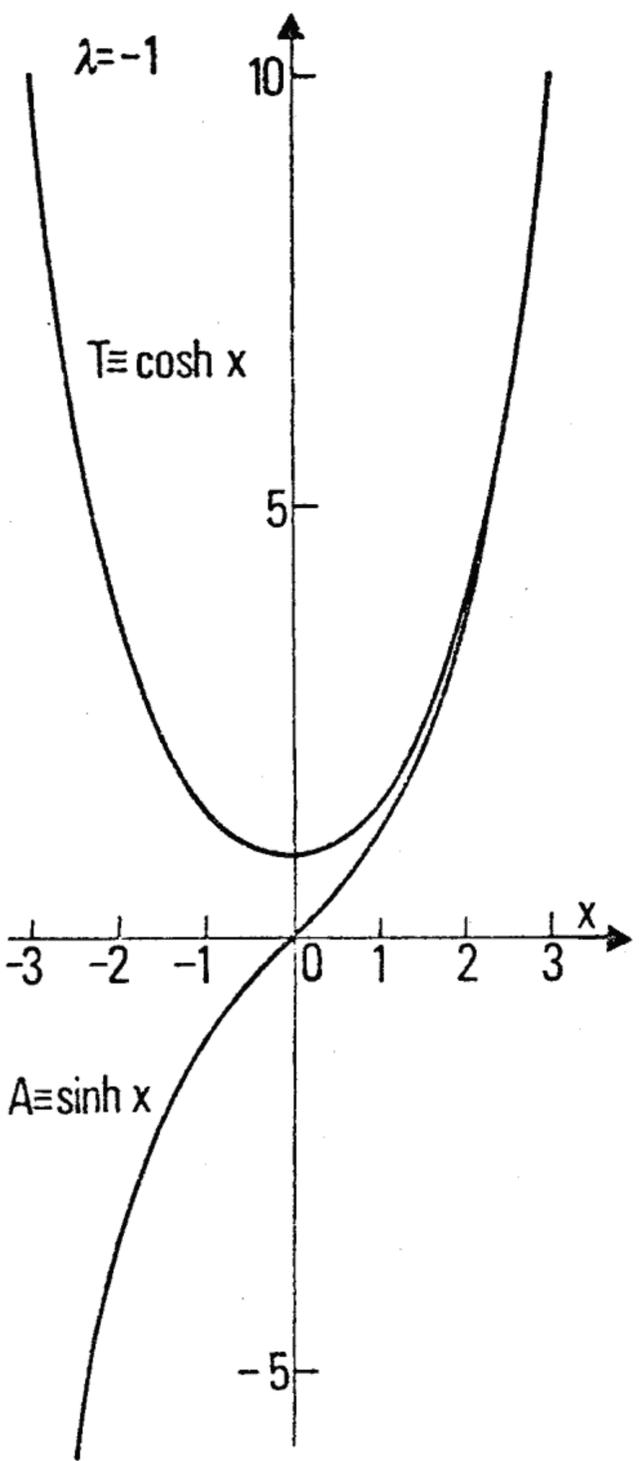
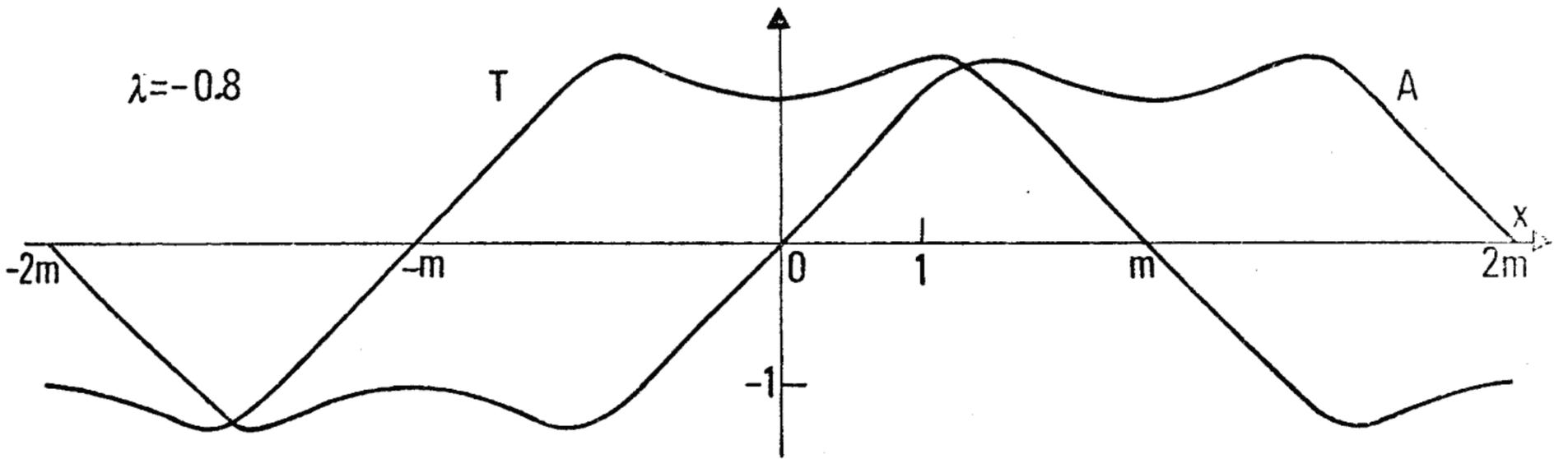
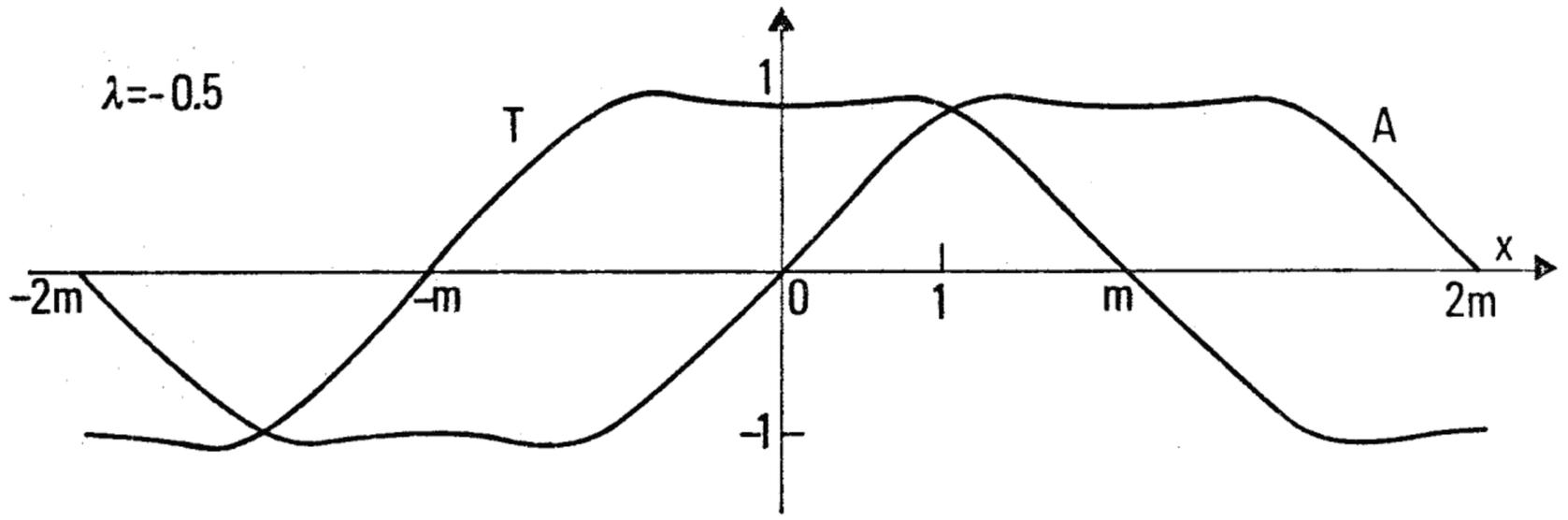


fig. 17b

complesso delle FTG estese è del tutto analogo a quello delle corrispondenti FTG ordinarie, illustrato nelle Figure 7 e 8, purché la griglia di quadrati di lato  $m$  che, nei diagrammi di Fig. 8, presenta le singolarità ai vertici venga sostituita con una griglia di rettangoli aventi i lati di lunghezza  $m(\lambda)$  e  $m'(\lambda)$  (tali rettangoli sono allungati in senso orizzontale per  $\lambda$  negativo, in senso verticale per  $\lambda$  positivo). La struttura delle FTG estese con  $|\lambda| > 1$  è invece più complicata, in quanto le singolarità di  $A$  e  $T$  formano un reticolo di parallelogrammi non rettangolari; tuttavia, essendo tali funzioni completamente determinate attraverso le (112) e (113), per ragioni di brevità non è il caso di discuterne in dettaglio il comportamento.

Per la stessa ragione non verranno scritte le formule esplicite delle FTG estese in termini di  $\wp(u)$  (ottenibili, p.es. dalle (68)), perché a questo punto l'uso delle funzioni di Weierstrass non apporta alcun ulteriore vantaggio alla trattazione. Tuttavia, quando  $-1 < \lambda < 1$ , può rivestire interesse la ricerca di quella particolare  $\wp(u)$  a discriminante positivo che ha il periodo reale uguale a  $2m(\lambda)$ , e quindi gioca lo stesso ruolo assunto dalla  $\wp(u|-4,0)$  nel caso delle FTG ordinarie ( $\lambda=0$ ). [Si ricordi che l'uso di tale funzione ha permesso una notevole semplificazione delle formule.] Anche questo problema verrà discusso più avanti (§III.4).

Restano ora da determinare le formule di addizione e sottrazione, di duplicazione e di bisezione. Cominciando dalle formule di duplicazione, è facile verificare che le espressioni (75) e (76) si mantengono valide anche per le FTG estese, e ciò porta immediatamente alle relazioni:

$$\begin{aligned}
 S(2x) &= \frac{2 A(x)T(x)}{T^4(x) - A^4(x)} \\
 A^2(2x) &= \frac{4 A^2(x)T^2(x)}{1 + 4(1 - \lambda^2)A^4(x)T^4(x)} \\
 T^2(2x) &= \frac{[T^4(x) - A^4(x)]^2}{1 + 4(1 - \lambda^2)A^4(x)T^4(x)}
 \end{aligned}
 \tag{114}$$

che non solo riproducono le (77) per  $\lambda = 0$ , ma per  $\lambda = \pm 1$  forniscono le ben note regole di duplicazione per le funzioni trigonometriche e iperboliche ordinarie. Il fatto che la prima delle (77) resti valida per ogni  $\lambda$  porta a supporre che anche la prima delle (78) si mantenga valida: e di fatto la cosa si può dimostrare con un calcolo lungo e complicato.<sup>55)</sup>

Mediante derivazione si ottengono le formule di addizione e sottrazione per  $A^2$  e  $T^2$ , che hanno ancora la forma (78), ove però  $F_{\pm}$  va definita nella seguente maniera:

$$F_{\pm} = A^2(x)T^2(y) + A^2(y)T^2(x) \mp 2A(x)T(x)A(y)T(y) \{ A^2(x)A^2(y) + T^2(x)T^2(y) + \lambda [A^2(x)T^2(y) + A^2(y)T^2(x)] \}$$

Risolvendo l'ultima delle (114) (con  $\frac{x}{2}$  al posto di  $x$ ) rispetto a  $2A^2(\frac{x}{2})T^2(\frac{x}{2})$  si ottiene, dopo alcuni passaggi, la seguente relazione:

$$2A^2(\frac{x}{2})T^2(\frac{x}{2}) = \frac{A^2(x) - \lambda(1 - T^2(x))}{(1 - \lambda^2)(1 + T^2(x))} \quad (115)$$

Ricavando nella (105)  $T^2$  in funzione di  $A^2$  (o viceversa), e inserendo tale relazione a primo membro della (115), si può, con alcuni passaggi, arrivare ad un'equazione di secondo grado le cui soluzioni forniscono  $A^4(\frac{x}{2})$  e  $T^4(\frac{x}{2})$ , che risultano dati dalle formule seguenti:

$$\begin{matrix} A^4(\frac{x}{2}) \\ T^4(\frac{x}{2}) \end{matrix} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + T^2 - \lambda(A^2 + 2\lambda T^2)}{(1 - \lambda^2)(1 + T^2)} \mp \frac{T}{1 + T^2} \sqrt{\frac{2}{1 - \lambda^2} [1 + T^2 - \lambda(A^2 + 2\lambda T^2)]} \right\} \quad (116)$$

55) Si parte dalla relazione (70) calcolata per  $S(x+y)$  e si usano le formule (75), (76) per  $cn(2x)$  e  $sn(2x)$ . E' interessante controllare che, anche se la cosa non è immediata, la prima delle (78) si applica anche alle funzioni trigonometriche e iperboliche ordinarie.

Sulle (116) possono essere controllate tutte le situazioni limite e le condizioni di analiticità, anche se in alcuni casi i calcoli possono risultare molto laboriosi.

Per concludere, restano da determinare gli sviluppi in serie delle funzioni. E' facile convincersi (e la cosa è confermata anche dalla struttura del sistema differenziale (104) che gli sviluppi in serie di A, T e S procedono per potenze di  $x^2$  (essendo T pari, A e S dispari). E' chiaro che, in tutti gli sviluppi, i coefficienti di posto pari devono essere proporzionali a  $\lambda$ , mentre quelli di posto dispari non si annullano per  $\lambda=0$ , e riproducono in tale limite i corrispondenti sviluppi (79'). Si ha dunque:

$$A(x|\lambda) = x - \frac{\lambda x^3}{6} - \frac{3x^5}{20} \left(1 - \frac{19}{18} \lambda^2\right) + \frac{31\lambda x^7}{280} \left(1 - \frac{559}{558} \lambda^2\right) + \frac{19x^9}{480} \left(1 - \frac{403}{133} \lambda^2 + \frac{29161}{14364} \lambda^4\right) + \dots \quad (116')$$

$$T(x|\lambda) = 1 - \frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \left(1 - \frac{7\lambda^2}{6}\right) + \frac{23\lambda x^6}{120} \left(1 - \frac{139\lambda^2}{138}\right) + \frac{9x^8}{160} \left(1 - \frac{215}{63} \lambda^2 + \frac{5473}{2268} \lambda^4\right) + \dots$$

$$S(x|\lambda) = x + \frac{\lambda x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \left(1 + \frac{\lambda^2}{3}\right) + \frac{11\lambda x^7}{120} \left(1 + \frac{\lambda^2}{33}\right) + \frac{x^9}{120} \left(1 + \frac{34}{21} \lambda^2 + \frac{\lambda^4}{189}\right) + \dots$$

Di nuovo, è interessante notare come, per  $\lambda = \pm 1$ , si ritrovino i noti sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche e iperboliche ordinarie.

Le FTG estese presentate in questo paragrafo godono, analogamente alle funzioni di Jacobi, di numerosissime proprietà matematiche interessanti, che però non è possibile presentare in questa sede per ragioni di spazio. Verranno menzionate solo alcune formule connesse al problema delle funzioni inverse. Mentre infatti le derivate delle funzioni inverse di  $A(x|\lambda)$  e  $T(x|\lambda)$  hanno, per  $\lambda \neq 0, \neq 1$ , un'espressione complicata contenente radici quadrate e quarte, invece la derivata di  $\text{arcS}(x|\lambda)$  è particolarmente semplice ed elegante. Basta tener conto della prima delle (101) e dividere la (105) per  $T^4$  per ottenere imme

diatamente la seguente relazione

$$\operatorname{arcS}(x|\lambda) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{z^4 + 2\lambda z^2 + 1}} \quad (117)$$

Si vede subito che questa espressione è legata in modo semplice all'integrale di Legendre di prima specie quando  $k^2 > 0$ :<sup>56)</sup>

$$F(x|k^2) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

e si ottiene facilmente la relazione

$$F(x|k^2) = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arcS}\left(\sqrt{k} x \mid -\frac{1+k^2}{2k}\right)$$

ove  $k$  indica la radice aritmetica di  $k^2$ . Un'altra interessante conseguenza della (117) si osserva notando che il radicale che figura a denominatore è sostanzialmente la funzione generatrice dei polinomi di Legendre, il che permette con alcuni passaggi di giungere alla formula

$$\operatorname{arcS}(x|\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} P_n(-\lambda) \quad (118)$$

Per  $\lambda = \pm 1$  si ritrovano gli sviluppi in serie delle funzioni inverse di  $\operatorname{tg} x$  e  $\operatorname{tgh} x$ . Se  $|\lambda| < 1$  il raggio di convergenza della (118) è 1; per altri valori di  $\lambda$  il raggio di convergenza è minore, perché le singolarità di  $\operatorname{arc} S$  sono più vicine all'origine. Supponendo quindi  $|\lambda| < 1$  e ponendo  $x = 1$  nella (118) si ottiene

---

56) Come risulterà chiaro dalla trattazione fatta nel prossimo paragrafo, lo stesso ragionamento può essere applicato quando  $k^2 < 0$  con riferimento alla funzione  $\operatorname{Sh}$ (estesa) al posto di  $S$ .

$$m(\lambda) = 2 \operatorname{arcs} S(1|\lambda) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(-\lambda)}{2n+1}$$

che, in termini delle grandezze relative alle funzioni di Jacobi, può essere scritta per  $0 \leq k^2 < 1$ ):

$$K(k) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(k^2 - k'^2)}{2n+1}$$

Questa relazione forse è già nota, ma è stata qui ottenuta con particolare semplicità ed eleganza.

### § III.3 L'estensione delle FIG di ordine 4.

L'estensione delle FTG di ordine 4 portata avanti nel paragrafo precedente può essere chiaramente fatta per qualunque valore, anche complesso, di  $k^2$  e  $\lambda$ , e quindi coprire, in linea di principio, tutte le funzioni ellittiche (in particolare, le  $\Phi_u$  a invarianti reali e discriminante positivo, a cui, come verrà mostrato nel prossimo paragrafo, corrispondono FTG con  $\lambda$  immaginario puro). Tuttavia in quest'ultimo caso la rappresentazione descritta non è conveniente, perché obbliga a passare per valori immaginari anche quando le  $\Phi_u$  e i loro argomenti sono reali. È ben noto, tuttavia, che è possibile passare da una tale  $\Phi_u$  a una  $\Phi_u$  con invarianti reali e discriminante negativo (esprimibile in termini di FTG estese con  $\lambda$  reale) attraverso una trasformazione di second'ordine sui periodi (v. TRICOMI). Attraverso tale procedimento si può trovare (e le formule risulteranno piuttosto semplici) un'espressione di tutte le funzioni di tale tipo mediante le FTG estese con  $\lambda$  reale già riscontrate.

Tuttavia, prima di affrontare l'argomento in dettaglio, è bene premettere la discussione del problema dell'estensione delle FIG di ordine 4, perché queste funzioni assumeranno nella trattazione un ruolo importante: e per cominciare, è necessario mostrare come si esprimono le FIG ordinarie ( $\lambda=0$ ), definite attraverso la formula (29'), nella quale, per fissare le idee, si prenderà  $\eta = e^{i\pi/4}$ . Essendo  $e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ , i valori di  $A(\eta x)$  e  $T(\eta x)$

possono essere calcolati dalle formule di addizione (78), eliminando poi gli immaginari attraverso le (29) (con  $e^-$ ). In questa maniera si ottengono le seguenti formule (in cui, come al solito, l'indice 4 è soppresso):

$$Ah^2(x) = \frac{2A^2 T^2}{T^4 - A^4} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad (119)$$

$$Th^2(x) = \frac{1}{T^4 - A^4} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$Sh(x) = \sqrt{2} AT \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

Si possono facilmente verificare la relazione  $Th^4 - Ah^4 = 1$  e le varie formule differenziali.

Si noti che il periodo reale delle funzioni (119) è  $2\sqrt{2}m$ . Inoltre le funzioni  $Ah$  e  $Th$  hanno dei punti di diramazione sull'asse reale in  $\frac{\sqrt{2}}{2}m + h\sqrt{2}m$  ( $h$  intero). La cosa è ovvia tenendo presente che, per la definizione (29'), il comportamento di  $Ah$  e  $Th$  nel piano complesso è dato sostanzialmente dai diagrammi di Fig. 8 in cui gli assi coordinati siano ruotati di  $45^\circ$ . (La struttura dei tagli nel piano complesso resta fissata da quella scelta per  $A$  e  $T$  attraverso la (29')).

In ogni caso le funzioni  $Ah, Th$  sono immaginarie pure per valori reali compresi tra  $\frac{\sqrt{2}}{2}m$  e  $\frac{3\sqrt{2}}{2}m$ , e in tutti gli intervalli ottenuti traslando tali valori di un multiplo di  $2\sqrt{2}m$ . In questo senso si può vedere un'analogia con il comportamento delle FTG estese con  $\lambda < -1$  (v. Fig. 17b); tuttavia non è stata trovata una formula semplice che connetta le FIG ordinarie e le FTG estese con  $\lambda = -3$  (anche esse direttamente collegate con le FTG ordinarie).

Passando ora alle FTG estese con  $\lambda \neq 0$ , è logico chiedersi se non sia possibile associare ad esse delle FIG estese corrispondenti, che si ridu-

cano alle (119) per  $\lambda = 0$  e che soddisfino a relazioni "somiglianti" alle (104) e (105), mantenendosi ovviamente reali per argomenti reali prossimi a  $x = 0$ . E' chiaro che la (29') non può più essere usata, dato che non vale più la (29) [e infatti il suo uso porterebbe a funzioni non reali per  $x$  reale prossimo a zero].

Bisogna invece servirsi direttamente delle (119), esprimendole attraverso opportune combinazioni di funzioni di Jacobi, che poi si manterranno per qualsiasi valore di  $\lambda$ . Si può anche vedere che le (119) possono essere facilmente espresse in termini di funzioni di Jacobi mediante le relazioni (75) e (76) (valide per ogni  $k^2$ ): inserendo tali relazioni nelle (119), si ottengono le formule seguenti (in cui va preso  $k^2 = \frac{1}{2}$ ):

$$Ah^2(x) = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sn}^2(\sqrt{2}x)}{\operatorname{cn}(\sqrt{2}x)}$$

$$Th^2(x) = \frac{\operatorname{dn}^2(\sqrt{2}x)}{\operatorname{cn}(\sqrt{2}x)}$$

$$Sh(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sn}(\sqrt{2}x)}{\operatorname{dn}(\sqrt{2}x)}$$

Queste relazioni suggeriscono la seguente generalizzazione per le FIG estese, in cui  $\alpha = \alpha(\lambda)$  è un parametro dipendente da  $\lambda$  e che si riduce a  $\sqrt{2}$  per  $\lambda = 0$ :

$$Ah^2(x) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\operatorname{sn}^2(\alpha x)}{\operatorname{cn}(\alpha x)}$$

$$Th^2(x) = \frac{\operatorname{dn}^2(\alpha x)}{\operatorname{cn}(\alpha x)} \tag{120}$$

$$Sh(x) = \frac{1}{\alpha} \frac{\operatorname{sn}(\alpha x)}{\operatorname{dn}(\alpha x)}$$

Si tratta di un'estensione che conserva le aree: infatti si può verificare

che, per ogni  $k^2$ , si ha  $\frac{dSh(x)}{dx} = \frac{1}{Th^2(x)}$ .

Il valore di  $\alpha$  si determina imponendo che le derivate di  $Ah$  e  $Th$  siano date rispettivamente da  $Th^3$  e  $Ah^3$  più un termine proporzionale a  $\lambda$ . Un breve calcolo mostra che si deve avere

$$= \frac{1}{\sqrt{kk'}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (121)$$

in cui, quando  $-1 < \lambda < 1$ , per le radici va preso il valore aritmetico.<sup>57)</sup>

Con la scelta (121) di  $\alpha$ , le relazioni differenziali per  $Ah$  e  $Th$  risultano:

$$\begin{aligned} Ah' &= Ah^3 - \lambda' Ah^2 Th \\ Th' &= Ah^3 + \lambda' Th^2 Ah \end{aligned} \quad (122)$$

con

$$\lambda' = \frac{1}{2} \lambda \alpha^2 = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (123)$$

Le (122) portano alla seguente relazione tra  $Ah$  e  $Th$ :

$$Th^4 - Ah^4 - 2\lambda' Ah^2 Th^2 = 1 \quad (124)$$

Si noti la somiglianza delle (122) e (124) con le (104) e (105). Il parametro  $\lambda'$  gioca per le FIG estese lo stesso ruolo che ha  $\lambda$  per le FIG estese; quindi appare logico parametrizzare le FIG estese in termini di  $\lambda'$ , scrivendo  $Ah(x|\lambda')$  e analoghe. Anche  $\lambda$  e  $\alpha$  possono essere ridefinite in termini di  $\lambda'$  come segue:

---

57) Con questa scelta, la determinazione della radice quadrata di  $cn$  nelle (120), estratta per ottenere  $Ah$  e  $Th$ , si fissa in modo da avere tali funzioni reali e positive per valori reali e positivi di  $x$  prossimi a zero.

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1+\lambda'^2}} \quad \alpha = \sqrt{2} \sqrt[4]{1+\lambda'^2} \quad (125)$$

e le due costanti  $\lambda$  e  $\lambda'$  soddisfano la relazione:

$$(1-\lambda^2)(1+\lambda'^2) = 1 \quad (126)$$

E' interessante notare come tutte le FTG estese con  $\lambda'$  reale siano associabili biunivocamente alle sole FTG con  $-1 < \lambda < 1$ . A tale valore estremo di  $\lambda$  (FTG degeneri), per cui sia  $\lambda'$  che  $\alpha$  diventano infiniti, non corrisponde alcuna FIG associata. Per  $\lambda$  reale e con modulo  $> 1$ , le formule (120) definiscono funzioni che non sono reali per  $x$  reale, ed hanno minore interesse. Più interessante è invece la situazione quando  $\lambda$  è immaginario puro (come già detto, ciò corrisponde alle FTG associate alle  $\mathcal{P}_u$  con invarianti reali e discriminante positivo): in tal caso, qualunque sia  $\lambda$ ,  $\alpha$  risulta reale e  $\lambda$  immaginario puro, così che anche in questo caso le FIG estese si comportano, nel confronto con le FTG associate, in maniera analoga a quanto già visto quando  $\lambda$  è reale e compreso tra  $-1$  e  $1$ .<sup>58)</sup>

Le funzioni (120) hanno tutte il periodo reale dato da  $4m(\lambda)/\alpha = 2\sqrt{2}m(\lambda)\sqrt[4]{1-\lambda^2}$ . Come curiosità, il periodo reale delle FIG estese risulta uguale a quello delle FTG associate per  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  ( $\lambda' = \pm \sqrt{3}$ ); si incontrano qui per la prima volta questi particolari valori di  $\lambda$  che assumeranno un ruolo "specificativo" negli sviluppi a venire. Le funzioni  $A_h$  e  $T_h$  hanno per periodo reale  $8m(\lambda)/\alpha$ , e hanno dei punti di diramazione sull'asse reale (spaziati da intervalli di un quarto di periodo), con un comportamento del tutto analogo a quanto visto per  $\lambda' = 0$ .

---

58) Per  $\lambda$  e  $\lambda'$  immaginari puri si ha una sorta di inversione dei ruoli delle due costanti: infatti in tal caso  $\lambda$  può essere qualsiasi, mentre la (123) mostra che  $\text{Im}\lambda'$  cade sempre tra  $-1$  e  $+1$  (estremi esclusi).

Naturalmente le (120) implicano la validità di relazioni del tipo (119), opportunamente generalizzate, che risultano:

$$\begin{aligned} Ah^2(x|\lambda') &= \frac{4}{\alpha^2} \frac{A^2 T^2}{T^4 - A^4} \left( \frac{\alpha x}{2} | \lambda \right) \\ Th^2(x|\lambda') &= \frac{1}{T^4 - A^4} \left( \frac{\alpha x}{2} | \lambda \right) \end{aligned} \quad (127)$$

$$Sh(x|\lambda') = \frac{2}{\alpha} AT \left( \frac{\alpha x}{2} | \lambda \right)$$

Le (127) possono essere invertite, in modo da dare un'espressione delle FTG estese in termini di FIG estese. Il modo più diretto per ottenerle è di partire dalla prima delle formule di duplicazione (114), che dà direttamente tale espressione per S, e di ricavare le altre per derivazione. Si ottiene così:

$$\begin{aligned} A^2(x|\lambda) &= \alpha^2 \frac{Ah^2 Th^2}{Th^4 + Ah^4} \left( \frac{x}{\alpha} | \lambda' \right) \\ T^2(x|\lambda) &= \frac{1}{Th^4 + Ah^4} \left( \frac{x}{\alpha} | \lambda' \right) \end{aligned} \quad (128)$$

$$S(x|\lambda) = \alpha Ah Th \left( \frac{x}{\alpha} | \lambda' \right)$$

di aspetto analogo alle (127).

Inserendo le (127) nelle (128) si riottengono appunto le (114): facendo il contrario, si ottengono le formule di duplicazione per le FIG estese, che risultano .

$$\begin{aligned} Ah^2(2x) &= \frac{4 Ah^2(x) Th^2(x)}{1 + 4(1 + \lambda'^2) Ah^4(x) Th^4(x)} \\ Th^2(2x) &= \frac{Th^4(x) + Ah^4(x)}{1 + 4(1 + \lambda'^2) Ah^4(x) Th^4(x)} \end{aligned} \quad (129)$$

$$\text{Sh}(2x) = \frac{2 \text{Ah}(x)\text{Th}(x)}{\text{Th}^4(x) + \text{Ah}^4(x)}$$

in stretta analogia con le (114).

Anche le formule di addizione e sottrazione per le FIG estese sono del tutto analoghe a quelle per le FTG estese: di fatto esse sono date dalle (78) con la materiale sostituzione di A,T,S con Ah, Th, Sh, e con la seguente definizione di  $F_{\pm}$ :

$$F_{\pm} = \text{Ah}^2(x)\text{Th}^2(y) + \text{Ah}^2(y)\text{Th}^2(x) \mp 2 \text{Ah}(x)\text{Th}(x)\text{Ah}(y)\text{Th}(y) \cdot |\text{Th}^2(x)\text{Th}^2(y) - \text{Ah}^2(x)\text{Ah}^2(y) - \lambda'(\text{Ah}^2(x)\text{Th}^2(y) + \text{Ah}^2(y)\text{Th}^2(x))| .$$

Tali espressioni possono essere ottenute dall'elaborazione delle formule precedenti: ma nel prossimo paragrafo mostreremo come si possa arrivare a tale risultato, in conseguenza delle proprietà di trasformazione delle FTG sotto una trasformazione di second'ordine sui periodi, quasi senza far calcoli.

Anche gli sviluppi delle FIG estese in serie di Taylor mostrano una spiccata analogia con le (116'). In particolare, le formule date per A e T valgono anche per Ah e Th, con la materiale sostituzione di  $\lambda$  con  $\lambda'$  e con la trasformazione in segni + di tutti i segni - presenti nelle formule stesse (sia quelli esterni che quelli interni ai coefficienti dello sviluppo). Lo sviluppo di Sh presenta invece numerosi segni -, ed è il seguente:

$$\text{Sh}(x|\lambda') = x - \lambda' \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} \left(1 - \frac{\lambda'^2}{3}\right) + \frac{11\lambda'x^7}{210} \left(1 - \frac{\lambda'^2}{33}\right) + \frac{x^9}{120} \left(1 - \frac{34}{21}\lambda'^2 + \frac{\lambda'^4}{189}\right) + \dots$$

Per  $\lambda' = 0$  si ritrovano gli sviluppi in serie delle FIG ordinarie (ottenuti dalle (79') in cui si inseriscano le (29')). E' chiaro che ora i valori  $\lambda' = \pm 1$  non hanno nessun significato particolare. Tutti gli sviluppi in serie sopracitati sono immediatamente ricavabili utilizzando i risultati che verranno ottenuti nel prossimo paragrafo.

§ III.4 Effetto sulle FTG estese di una trasformazione di second'ordine sui periodi, e connessione con le  $\mathcal{P}u$  a invarianti reali e  $\Delta > 0$ .

Veniamo ora a considerare l'effetto sulle FTG estese di ordine 4 dovuto ad una trasformazione di 2° ordine sui periodi. Come trasformazione di riferimento<sup>59)</sup> conviene scegliere una che muti una nell'altra due  $\mathcal{P}u$  a invarianti reali, l'una con  $\Delta > 0$  e l'altra con  $\Delta < 0$ .

Si hanno due possibilità di scelta di tali trasformazioni, che verranno indicate con le lettere F e H; la loro azione sui periodi è mostrata nei diagrammi di Fig. 18 (ove sono indicati con una tilde i periodi trasformati). In particolare la trasformazione F, se applicata ad una  $\mathcal{P}u$  a invarianti reale con  $\Delta > 0$ , la muta in uso con  $\Delta < 0$ ; la trasformazione H fa l'opposto.<sup>60)</sup> La successione delle due trasformazioni  $FH = HF$ , applicata ad una qualunque  $\mathcal{P}u$ , dà luogo al dimezzamento di entrambi i periodi, cioè alla duplicazione dell'argomento.

Poiché, come vedremo, in termini di FTG l'una dell'una o dell'altra trasformazione porta agli stessi risultati, conviene studiare in dettaglio il caso della trasformazione H, che verrà applicata, come spiegato, alle funzioni ellittiche con invarianti reali e  $\Delta < 0$  (descrivibili quindi in termini di FTG estese con  $\lambda$  reale compreso tra -1 e +1). Molti risultati però avranno validità generale. La trattazione riguarderà sia l'effetto della

---

59) Come mostrato nel già citato capitolo del testo di TRICOMI, tutte le trasformazioni di 2° ordine sono riconducibili l'una all'altra mediante trasformazioni di 1° ordine, e quindi lo studio delle trasformazioni di 2° ordine può essere limitato ad una sola tra esse, scelta in modo opportuno.

60) In termini delle trasformazioni studiate in dettaglio nel TRICOMI, si ha  $F = CLBD$ ,  $H = DLBD$ , ove le lettere indicano le trasformazioni di 1° ordine (B,C,D) e di 2° ordine (L) descritte nel testo, e applicate in successione a partire da quella di destra.

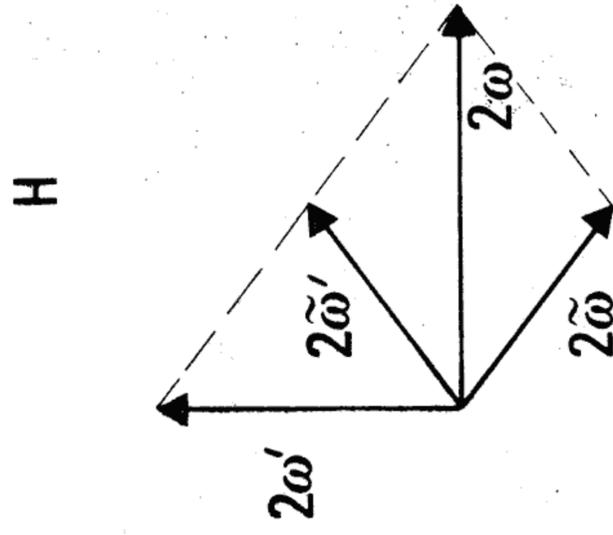
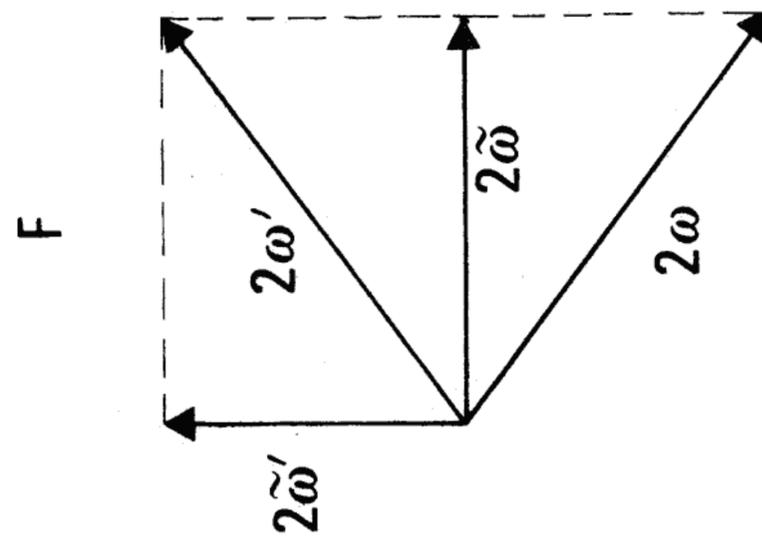


fig. 18

trasformazione sulle funzioni di Jacobi (e quindi sulle FTG) che l'effetto sulle  $\mathcal{P}u$ . Conviene quindi parametrizzare la  $\mathcal{P}u$  di partenza in modo opportuno, descrivendola in termini di due parametri reali uno dei quali sia proprio  $\lambda$  (in modulo  $\leq 1$ ), mentre per l'altro si può prendere la quantità

$r_3 = \sqrt{e_1 - e_3}$  <sup>61)</sup> che, per le  $\mathcal{P}u$  considerate, è sempre reale e non negativa.

In questo modo si ottengono delle semplici espressioni per gli invarianti irrazionali  $e_1, e_2, e_3$ , per gli invarianti  $g_2, g_3$  e per l'invariante assoluto  $J$ : <sup>62)</sup>

$$e_1 = r_3^2 \frac{\lambda+3}{6} \quad e_2 = -r_3^2 \frac{\lambda}{6} \quad e_3 = r_3^2 \frac{\lambda-3}{6} \quad (130)$$

$$g_2 = r_3^4 \frac{\lambda^2+3}{3} \quad g_3 = r_3^6 \lambda \frac{(9-\lambda^2)}{27} \quad (131)$$

$$J = \frac{(\lambda^2+3)^3}{27(1-\lambda^2)^2} \quad (132)$$

Dalle espressioni precedenti si trova, come da aspettarsi, che  $J$  dipende solo da  $\lambda$ ; inoltre, tenendo fisso  $\lambda$  e variando  $r_3$ , si percorre l'intera famiglia delle  $\mathcal{P}u$  appartenenti ad un ramo della curva  $J = \text{cost.}$  mostrato in Fig. 15 (l'intera curva si ottiene considerando entrambi i valori  $\pm \lambda$ ). Tali  $\mathcal{P}u$  vanno l'una nell'altra attraverso la relazione di omogeneità (32): se si prende come riferimento la particolare  $\mathcal{P}u$  per cui è  $r_3 = 1$  (per le (68) tale  $\mathcal{P}u$  ha gli stessi periodi delle funzioni di Jacobi e delle FTG associate) tutte le altre  $\mathcal{P}u$  della famiglia si ottengono dalla (32) con  $t=r_3$ .

61) Da ora in avanti verrà usata (data una  $\mathcal{P}u$ ) la notazione abbreviata  $r_1 = \sqrt{e_1 - e_2}$ ,  $r_2 = \sqrt{e_2 - e_3}$ ,  $r_3 = \sqrt{e_1 - e_3}$ , ove la determinazione dei radicali va fatta seguendo la prescrizione data nel TRICOMI. Si ha  $r_1 = k'r_3, r_2 = kr_3$ , ove  $k$  e  $k'$  si riferiscono alle funzioni di Jacobi associate alla  $\mathcal{P}u$  studiata.

62) E' chiaro che le formule seguenti continuano a valere per qualunque  $\lambda$ , anche complesso. Può essere interessante ritrovare i risultati già ottenuti quando si cambia  $\lambda$  in uno dei valori (108): in tal caso  $J$  resta invariato, e così pure i rapporti tra gli invarianti (130), che vengono sostanzialmente solo a scambiarsi di ruolo fra loro.

Indichiamo con  $G_2 = \frac{\lambda^2+3}{3}$  e  $G_3 = \frac{\lambda(9-\lambda^2)}{27}$  gli invarianti relativi a tale funzione.

Per  $|\lambda| \leq 1$ , l'insieme delle  $\mathcal{P}(u|G_2, G_3)$  è rappresentato dalla curva a tratto pieno AFA' in Fig. 15: la continuazione a tratteggio di tale curva corrisponde ai valori reali di  $\lambda$  in modulo maggiori di 1.

Passiamo ora all'effetto della trasformazione H, trattando separatamente il caso della trasformazione delle funzioni di Jacobi e delle  $\mathcal{P}u$ : tutte le quantità trasformate saranno contrassegnate con una tilde. Applicando successivamente le formule date nel TRICOMI relativamente alle trasformazioni che compongono H (v. nota <sup>60</sup>), si trova che l'argomento  $v$  delle funzioni di Jacobi viene trasformato in  $\tilde{v}$  dato da

$$\tilde{v} = 2e^{i\pi/4} \sqrt{kk'} v = e^{i\pi/4} \left( \frac{2}{\alpha} \right) v \quad (133)$$

ove  $k, k', \alpha$  (definito dalla (121)) si riferiscono alle funzioni di Jacobi di partenza, e possono essere tutti espressi in funzioni di  $\lambda$ . Inoltre,  $k$  e  $k'$  si trasformano nel seguente modo:

$$\tilde{k} = \frac{k'+ik}{2e^{i\pi/4} \sqrt{kk'}} \quad \tilde{k}' = \frac{i(k'-ik)}{2e^{i\pi/4} \sqrt{kk'}} \quad (134)$$

Quando  $k$  e  $k'$  sono entrambi reali e positivi (cioè quando si parte dalle funzioni di Jacobi associate alla FTG con  $-1 < \lambda < 1$ ),  $\tilde{k}$  e  $\tilde{k}'$  risultano complessi coniugati, come del resto è da aspettarsi per funzioni di Jacobi associate ad una  $\mathcal{P}u$  con invarianti reali e  $\Delta > 0$  (si veda più avanti). In tal caso dunque si ha

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \kappa e^{-i\delta} \\ \tilde{k}' &= \kappa e^{i\delta} \end{aligned} \quad (135)$$

ove  $\kappa, \delta$  sono reali ( $\kappa > 0$ ), ed esprimibili in funzione di  $\lambda$ :

$$\kappa = \frac{\alpha}{2} \quad \delta = \frac{1}{2} \arcsin \lambda \quad (136)$$

con il solito significato di  $\alpha$ .

Ma la conseguenza più interessante della trasformazione  $H$  si trova calcolando i valori trasformati delle quantità  $\lambda$ ,  $\lambda'$  e  $\alpha$ . Utilizzando le definizioni (104'), (121) e (123), e servendosi delle formule (134), si ottiene infatti, qualunque sia  $\lambda$ :<sup>63)</sup>

$$\tilde{\lambda} = i\lambda' \quad \tilde{\lambda}' = i\lambda \quad \tilde{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \quad (137)$$

così che la relazione (126) può essere scritta nella seguente maniera:

$$(1-\lambda^2)(1-\tilde{\lambda}^2) = 1 \quad (138)$$

mentre l'ultima delle (137) può anche essere messa sotto la forma (sostanzialmente equivalente alla (138)):

$$4kk'\tilde{k}\tilde{k}' = 1$$

Quando  $\lambda$  è reale e compreso tra  $-1$  e  $1$  si ritrovano alcune conclusioni già raggiunte nel paragrafo precedente, e cioè che le FTG e FIG trasformate (associabili a una  $\mathcal{P}_u$  a invarianti reali e  $\Delta > 0$ ) hanno rispettivamente  $\lambda$  e  $\lambda'$  immaginari puri, mentre la quantità  $\alpha$  che entra nella definizione delle FIG estese si mantiene reale.

Inoltre le (137) confermano quello "scambio di ruolo" tra  $\lambda$  e  $\lambda'$  accennato nella precedente nota<sup>58)</sup>: infatti è la parte immaginaria di  $\tilde{\lambda}'$  a essere limitata tra  $-1$  e  $1$ , mentre  $\lambda$  può assumere qualsiasi valore immaginario puro.

Passiamo ora alle leggi di trasformazione delle funzioni di Jacobi (in cui si mantiene la notazione  $\alpha = 1/\sqrt{kk'}$ ):

63) Si intende che, quando  $\lambda$  non è reale e compreso tra  $-1$  e  $1$ , nel qual caso la definizione di  $\lambda'$  e  $\alpha$  non pone problemi, la validità delle (137) è connessa alla scelta di un'opportuna determinazione delle radici che figurano nella definizione di  $\lambda'$  e  $\alpha$ , scelta che risulta sempre possibile. Non è il caso di dilungarsi ulteriormente su questo punto, perché la situazione che interessa di più è quella di  $\lambda'$  e  $\alpha$  reali.

$$\begin{aligned} \tilde{\text{sn}} v &= \text{sn}(\tilde{v}, \tilde{k}) = e^{i\pi/4} \frac{2}{\alpha} \frac{\text{sn} \text{ dn}}{\text{dn}^2 + \frac{i}{\alpha^2} \text{sn}^2} (v, k) \\ \tilde{\text{cn}} v &= \text{cn}(\tilde{v}, \tilde{k}) = \frac{\text{dn}^2 - \frac{i}{\alpha^2} \text{sn}^2}{\text{dn}^2 + \frac{i}{\alpha^2} \text{sn}^2} (v, k) \\ \tilde{\text{dn}} v &= \text{dn}(\tilde{v}, \tilde{k}) = \frac{\text{cn}}{\text{dn}^2 + \frac{i}{\alpha^2} \text{sn}^2} (v, k) \end{aligned} \quad (139)$$

Di per sé queste relazioni non sembrano molto interessanti, perché (come del resto ci si deve aspettare, data la natura delle  $\mathcal{P}u$  associate) si tratta di formule che mescolano quantità reali e immaginarie. Ma si ottiene una notevolissima semplificazione se si calcolano i rapporti tra le (138) che figurano nelle definizioni (120) delle FIG estese. (A causa dell'ultima delle (137), la (133) può essere riscritta come  $v = e^{i\pi/4} \tilde{\alpha} v$ ). In particolare si ha

$$\frac{\tilde{\text{sn}} v}{\tilde{\text{dn}} v} = \frac{\text{sn}(e^{i\pi/4} \tilde{\alpha} v)}{\text{dn}(e^{i\pi/4} \tilde{\alpha} v)} = \tilde{\alpha} \text{Sh}(e^{i\pi/4} v | \tilde{\lambda}') = e^{i\pi/4} \frac{2}{\alpha} S(v | \lambda)$$

e, ricordando nuovamente le (137) e ponendo  $\eta = e^{-i\pi/4}$ , finalmente si ottiene

$$\text{Sh}(v | i\lambda) = \frac{1}{\eta} S(\eta v | \lambda) \quad (140)$$

da cui per derivazione si deduce immediatamente

$$\begin{aligned} \text{Th}(v | i\lambda) &= T(\eta v | \lambda) \\ \text{Ah}(v | i\lambda) &= \frac{1}{\eta} A(\eta v | \lambda) \end{aligned} \quad (141)$$

Queste formule di trasformazione forniscono la generalizzazione della relazione (29') che fa passare dalle FTG alle FIG: si vede che oltre alla ro-

tazione dell'argomento nel piano complesso, è necessario, quando  $\lambda \neq 0$ , ruotare anche  $\lambda$  (che dopo l'operazione assume il significato di  $\lambda'$ ). A dire il vero, la generalizzazione delle (29') attraverso le (141) può apparire incompleta, perché delle quattro radici quarte di  $-1$  intervengono in tali formule solo i valori  $\eta = e^{-i\pi/4}$  ed  $\eta = -e^{-i\pi/4} = e^{3i\pi/4}$  (la validità delle (141) in quest'ultimo caso è un'immediata conseguenza della parità delle FTG). Tuttavia vi sono numerose maniere di accertare cosa succede quando nei secondi membri delle (141) si inserisce uno degli altri due valori possibili (complessi coniugati dei precedenti, e che verranno per il momento indicati con  $\eta^*$ ). Un metodo lungo, ma istruttivo, consiste nel considerare, invece della trasformazione  $H$ , la trasformazione  $F^{64}$ ; si può anche calcolare dalle (139) il rapporto  $\tilde{S} = \tilde{s}_n v \tilde{d}_n v / \tilde{c}_n v$ ; ma il procedimento più rapido consiste nel porre  $\eta^* = i\eta$  (come è sempre il caso) e di utilizzare opportunamente le relazioni (109) e (110). In particolare la (140) con questo procedimento dà luogo a

$$\text{Sh}(v|-i\lambda) = \frac{1}{\eta^*} S(\eta^* v|\lambda) \quad (142)$$

e per derivazione si ottengono le analoghe delle (141).

Tutte le formule di trasformazione possono essere infine messe insieme con una notazione compatta del tipo:

---

64) L'effetto della trasformazione  $F$  non verrà trattato in dettaglio per motivi di brevità, e ne saranno soltanto riportati qui i risultati più importanti, che sono molto simili a quelli a quelli già ottenuti per la trasformazione  $H$ . In particolare, le formule (133), (137) e (139) restano le stesse, con la sostituzione (dappertutto di  $e^{i\pi/4}$  con  $e^{3i\pi/4}$ , e di  $i$  con  $-i$ , mentre nelle (134) vanno semplicemente scambiati fra loro  $k$  e  $k'$ .

E' chiaro che l'ultima delle (137) e la (138) restano invariate.

$$\begin{aligned}
 \text{Ah}(v|-\eta^2\lambda) &= \frac{1}{\eta} A(\eta v|\lambda) \\
 \text{Th}(v|-\eta^2\lambda) &= T(\eta v|\lambda) \\
 \text{Sh}(v|-\eta^2\lambda) &= \frac{1}{\eta} S(\eta v|\lambda)
 \end{aligned}
 \tag{143}$$

ove  $\eta$  è ora una qualsiasi radice quarta di  $-1$ . Si ritrova quindi la generalizzazione completa delle (29') (riprodotte per  $\lambda = 0$ ).

Si tenga presente che le (143) valgono per qualunque  $\lambda$ , anche se, come più volte ripetuto, i casi che più interessano sono quelli di  $\lambda$  reale o immaginario puro, corrispondenti alle  $\mathcal{P}u$  con invarianti reali.

E' chiaro che, mediante l'uso delle (143), si ottengono immediatamente le formule di addizione e sottrazione, gli sviluppi in serie, etc., per le FIG estese, a partire dalle analoghe espressioni per le FTG estese, richiamate nel §III.2. Si ottengono così con gran facilità tutti i risultati enunciati nel paragrafo precedente.

Passiamo ora al problema della trasformazione delle  $\mathcal{P}u$ , la cui soluzione permetterà di esprimere in maniera semplice tutte le  $\mathcal{P}u$  a invarianti reali e  $\Delta > 0$  in termini di FTG estese con  $\lambda$  reale, in modo da coinvolgere solo quantità reali per valori reali dell'argomento. Come effetto della trasformazione  $H$  su una  $\mathcal{P}u$  con  $\Delta < 0$  (parametrizzata secondo le (130)-(132)), si ha la seguente espressione per gli invarianti irrazionali della funzione trasformata:

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_1 &= e_2 + 2ir_3^2kk' = r_3^2\left(-\frac{\lambda}{3} + i\sqrt{1-\lambda^2}\right) \\
 \tilde{e}_2 &= -2e_2 = \frac{2\lambda}{3} r_3^2
 \end{aligned}
 \tag{144}$$

$$\tilde{e}_3 = e_2 - 2ir_3^2kk' = r_3^2\left(-\frac{\lambda}{3} - i\sqrt{1-\lambda^2}\right)$$

Quando  $-1 < \lambda < 1$  la  $\mathcal{P}u$  trasformata è del tipo voluto ( $e_2$  reale,  $e_1$  ed  $e_3$  complessi coniugati): nel caso particolare  $\lambda = \pm 1$  le  $\mathcal{P}u$  trasformate sono le stesse  $\mathcal{P}u$  (degeneri) di partenza, in cui sono permutati tra loro  $e_1, e_2, e_3$ .

E' facile convincersi che, quando  $\lambda$  varia da  $-1$  a  $1$  e  $r_3$  da  $0$  a  $\infty$ , l'insieme delle  $\mathcal{P}u$  trasformate copre tutte e sole le  $\mathcal{P}u$  a invarianti reali e discriminante positivo.

Il modulo  $\rho$  e la fase  $\phi$  di  $\tilde{e}_1$  sono dati da

$$\rho = \frac{r_3^2}{3} \sqrt{9-8\lambda^2} \quad (145)$$

$$\cos \phi = -\frac{\lambda}{\sqrt{9-8\lambda^2}} \quad \sin \phi = \frac{3\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{9-8\lambda^2}} \quad \cotg \phi = -\frac{1}{3} \lambda' \quad (146)$$

e gli invarianti  $\tilde{g}_2, \tilde{g}_3$  e l'invariante assoluto  $\tilde{J}$  si esprimono nella forma

$$\tilde{g}_2 = -\frac{4}{3} r_3^4 (3-4\lambda^2) \quad \tilde{g}_3 = \frac{8}{27} r_3^6 \lambda (9-8\lambda^2) \quad (147)$$

$$\tilde{J} = \frac{(3-4\lambda^2)^3}{27(1-\lambda^2)}$$

Le (146) mostrano che  $\phi$  dipende soltanto da  $\lambda$  (in un certo senso,  $\cos \phi$  gioca per le  $\mathcal{P}u$  con  $\Delta > 0$  il ruolo che gioca  $\lambda$  quando  $\Delta < 0$ , mentre  $\rho$  si può dire che rappresenti un parametro "di omogeneità" analogo a  $r_3^2$ ). Le (147) e (148) mostrano che le funzioni di tipo equianarmonico ( $J=g_2=0$ )

si ottengono trasformando le  $\mathcal{P}u$  corrispondenti a  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  (valore già incontrato in precedenza):

le (137) quindi affermano che per tali funzioni si ha  $\tilde{\lambda} = \pm i\sqrt{3}$  e  $\tilde{\alpha} = 1$ . Con un po' d'algebra si può controllare dalle formule precedenti che  $\tilde{k}$  e  $\tilde{k}'$  risultano complessi coniugati

secondo le formule (135) già viste: in termini di  $\phi$  si ha

$$\cos 2\delta = \frac{1}{2\kappa} = (1+9 \cotg^2 \phi)^{-1/2}$$

$$\tilde{\lambda} = 2i\kappa^2 \sin 2\delta = -3i \cotg \phi$$

Utilizzando in queste formule le (146) si ritrovano le (136) e (137).  
 Come  $\mathcal{P}u$  di riferimento tra tutte quelle corrispondenti allo stesso valore di  $\lambda$  (o di  $\phi$ ) conviene scegliere la trasformata della  $\mathcal{P}(u|G_2, G_3)$ , che sarà indicata con  $\tilde{\mathcal{P}}u = \mathcal{P}(u|\tilde{G}_2, \tilde{G}_3)$ , ove i valori di  $\tilde{G}_2, \tilde{G}_3$  si ottengono dalle (147) ponendo  $r_3 = 1$ . Quando  $|\lambda| \leq 1$  l'insieme di tali  $\mathcal{P}u$  è rappresentato in Fig. 15 dai punti della curva ALA' (a tratto pieno): il prolungamento tratteggiato di tale curva corrisponde alle  $\mathcal{P}u$  trasformate quando  $\lambda$  è reale e in modulo maggiore di 1: tali  $\mathcal{P}u$  continuano ad avere  $\Delta < 0$ , come è controllabile (oltre che dalla Figura) anche da molte fra le formule date (p.es. la (144) e la (148)<sup>65</sup>). Quando  $|\lambda| < 1$  tutte le  $\mathcal{P}u$  trasformate hanno, per costruzione, un periodo reale e un periodo immaginario uguali a quelli delle  $\mathcal{P}u$  di partenza<sup>66</sup>: ne segue che tutte le  $\tilde{\mathcal{P}}u$ , rappresentate dai punti della curva ALA', hanno il periodo reale e quello immaginario uguali a quelli delle corrispondenti FTG con parametro  $\lambda$ , e giocano quindi il ruolo che, nel caso delle FTG ordinarie, gioca la  $\mathcal{P}(u|-4,0)$ , ripetutamente incontrata nella trattazione del §II.5 (e che in Fig. 15 è rappresentata dal punto L, mentre la  $\mathcal{P}(u|1,0)$  è rappresentata dal punto F)<sup>67</sup>.

Ogni  $\tilde{\mathcal{P}}u$  potrà quindi essere semplicemente espressa in termini delle FTG estese, con un opportuno valore di  $\lambda$  (in modulo  $\leq 1$ ), mediante formule che, per  $\lambda = 0$ , devono ricondursi alle (62) e (63). Tali formule sono immediatamente ricavabili combinando opportunamente fra loro le (168) riferite alla  $\tilde{\mathcal{P}}u = \mathcal{P}(u|\tilde{G}_2, \tilde{G}_3)$ , e alle funzioni di Jacobi ad essa direttamente associate

65) In questo caso nelle (145) e (146)  $\rho$  e  $\phi$  perdono il loro significato di modulo e argomento.

66) Ciò è più vero nel caso di  $|\lambda| > 1$ .

67) La relazione tra le due  $\mathcal{P}u$  corrispondenti (per ogni  $\lambda$ ) è sempre riconducibile ad un'equazione del tipo di quella ottenibile confrontando la (73) con la (62).

(e a cui corrispondono FTG estese con  $\lambda$  immaginario puro). Contrassegnando con una tilde tutte le grandezze pertinenti alle summenzionate funzioni, si ha:

$$\tilde{\wp}u - \tilde{e}_2 = \tilde{r}_3^2 \frac{\operatorname{dn}^2(\tilde{r}_3 u, \tilde{k})}{\operatorname{sn}^2(\tilde{r}_3 u, \tilde{k})} \quad (149)$$

Dalle (144) con  $r_3 = 1$  si ha:

$$\tilde{r}_3 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \frac{4}{\sqrt{1-\lambda^2}} = e^{i\pi/4} \frac{2}{\alpha} = e^{i\pi/4} \tilde{\alpha}$$

(ricordando l'ultima delle (137)).

Inserendo infine tale valore nella (149), e utilizzando anche la seconda delle (144) con  $r_3 = 1$ , si ottiene:

$$\tilde{\wp}_x = \frac{2\lambda}{3} + \frac{i}{\operatorname{Sh}^2(e^{i\pi/4} x | i\lambda)} = \frac{2\lambda}{3} + \frac{1}{S^2(x|\lambda)} \quad (150)$$

Nei passaggi si è tenuto conto dell'espressione (137) per  $\tilde{\lambda}'$ , e si è utilizzata la (140) con  $\eta = e^{-i\pi/4}$ .

Derivando la (150) rispetto a  $x$  si ottiene:

$$\tilde{\wp}'_x = -2 \frac{T}{A^3} (x|\lambda) \quad (151)$$

La (150) e la (151) combinate permettono facilmente di ottenere delle relazioni analoghe alle (63), in cui al posto di  $\wp$  va messo  $\tilde{\wp} - \tilde{e}_2 = \tilde{\wp} - \frac{2\lambda}{3}$ , che, come più volte sottolineato, è il quadrato di una funzione uniforme. E' di immediata verifica la relazione  $\tilde{\wp}''_x = 6\tilde{\wp}^2_x - \frac{1}{2} \tilde{G}_2$ .

Si è quindi ottenuta una semplice relazione che (con l'aiuto della relazione di omogeneità) permette di esprimere tutte le  $\wp u$  a invarianti reali e  $\Delta > 0$  in termini delle FTG estese di ordine 4, rimanendo nel campo reale per

valori reali dell'argomento.

### III.5 Il problema dell'estensione delle FTG di ordine 3 e 6.

Gli interessanti risultati ottenuti nei paragrafi precedenti con il procedimento di estensione delle FTG e FIG di ordine 4 possono far pensare che una procedura dello stesso tipo possa essere applicata anche per le FTG di ordine 3 (o 6), in modo da ottenere una descrizione completa della famiglia delle funzioni ellittiche, stavolta a partire dalla classe delle  $\mathcal{P}_u$  con  $\Delta > 0$  (centrate intorno alle  $\mathcal{P}_u$  equianarmoniche). Invece, come verrà discusso in questo paragrafo, il parallelismo tra i due casi non si verifica. Infatti, cominciando col considerare la situazione più semplice (FTG di ordine 3), vediamo quali funzioni vengono descritte quando si effettua un'estensione semplice, che conserva le aree, in cui la funzione  $F$  definita dalla (91) sia un polinomio in  $A$  e  $T$  (chiaramente omogeneo di grado 3). La validità delle condizioni (92) e (93) fissa in modo univoco la dipendenza funzionale di  $F$  da  $A$  e  $T$  nella forma  $A^2T + AT^2$ , in modo che per tale estensione si ha (come al solito, si è eliminata nei simboli l'indicazione dell'ordine  $n$  delle FTG, e di tutti gli altri argomenti quando il farlo non ingenera confusione):

$$A^3 + T^3 + \Lambda(A^2T + AT^2) = 1 \quad (152)$$

(Per il parametro moltiplicativo si è usato il simbolo  $\Lambda$ , perché si vuole riservare il simbolo  $\lambda$  alla quantità che distingue fra loro le FTG estese di ordine 4, e che, come visto nel paragrafo precedente, può servire a distinguere anche le  $\mathcal{P}_u$  con  $\Delta > 0$ ).

Ebbene, le funzioni che soddisfano la relazione (152) e il sistema differenziale di tipo (95) ad essa conseguente non ricoprono, al variare di  $\Lambda$ , l'intera classe delle funzioni ellittiche, ma restano, per così dire, confinate nell'ambito delle  $\mathcal{P}_u$  equianarmoniche, perché sono sempre riconducibili

a opportune combinazioni lineari delle FTG ordinarie <sup>68)</sup>. Più precisamente, come è facile, benché noioso, controllare, le funzioni cercate sono date da (con ovvio significato dei simboli):

$$\begin{aligned} A(x|\Lambda) &= a A(\gamma x + \delta | 0) + b T(\gamma x + \delta | 0) \\ T(x|\Lambda) &= b A(\gamma x + \delta | 0) + a T(\gamma x + \delta | 0) \end{aligned} \tag{153}$$

ove <sup>69)</sup>

$$a+b = (1+\Lambda)^{-1/3}, \quad a-b = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}\right)^{-1/2} (1+\Lambda)^{1/6}$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2} (1+\Lambda)^{1/6}, \quad \delta = \arctan(\gamma a) = \arctan(-\gamma b)$$

---

68) Si ritrova la stessa situazione tentando un'estensione di tipo analogo per le funzioni trigonometriche ordinarie (n=2): si ottiene infatti per le funzioni estese una combinazione lineare di seni e coseni.

69) Per  $\Lambda$  reale, si vede che si rimane nel campo reale per argomenti reali solo quando è  $-1 < \Lambda < 3$ ; tuttavia le funzioni sono definibili per qualunque  $\Lambda$ , e, se  $\Lambda$  è reale, risultano reali quando  $x$  è reale e prossimo a zero, come si può accertare esaminando la struttura delle curve parametriche. I casi  $\Lambda = -1$  e  $\Lambda = 3$  si ottengono passando opportunamente al limite nelle (153), e forniscono soluzioni non periodiche [per  $\Lambda = 3$  si ritrovano le FTG di ordine 1 (eq.(7))]. Probabilmente anche in questo caso, come si è visto per le FTG estese di ordine 4, la soluzione per  $\Lambda$  esterno all'intervallo  $(-1, 3)$  è riconducibile alla soluzione per  $\Lambda$  interno a tale intervallo mediante un'opportuna trasformazione. Tuttavia, dato lo scarso interesse del problema, lo studio in tale direzione non è stato affrontato.

Per  $n=6$ , invece, il ragionamento che porta al risultato precedente non si può ripetere, e il sistema differenziale delle FTG estese con  $F(A,T)$  data da un polinomio omogeneo di grado 6 ammette soluzioni non banali. Vi sono diverse maniere di scegliere la forma di  $F(A,T)$ : le più semplici portano alle relazioni seguenti:

$$A^6 + T^6 + 2\Lambda A^3 T^3 = 1 \quad (154)$$

oppure:

$$A^6 + T^6 + 3\Lambda(A^2 T^4 + A^4 T^2) = 1 \quad (155)$$

di cui forse l'ultima è preferibile <sup>70)</sup>.

Tuttavia anche queste funzioni non sembrano essere adatte per la descrizione della classe delle funzioni ellittiche al variare di  $\Lambda$ : infatti, con l'eccezione di alcuni valori di  $\Lambda$ , esse sembrano piuttosto descrivere particolari classi di funzioni iperellittiche. Infatti, gli integrali associati alla definizione di alcune semplici funzioni inverse (come quelli per  $\text{arcS}$ , immediatamente definibili dalle (154) o (155) tenendo presente le (101), o, nel caso (154), anche quello per  $\text{arcAT}$ ) non sembrano riconducibili ad integrali ellittici, per quanto complicati, come invece dovrebbe essere il caso <sup>71)</sup>. Naturalmente, queste conclusioni non sono sicure al 100%, in quanto non è stata fornita un'effettiva dimostrazione riguardo alla non riconducibilità degli integrali in questione ad integrali ellittici: tuttavia la loro validità appare piuttosto probabile.

In tale situazione, se si vuole portare ugualmente avanti lo studio del problema della descrizione delle funzioni ellittiche in termini di opportune FTG estese con  $n=3$  e  $6$ , si possono assumere due diversi punti di vista:

a) cercare estensioni delle FTG (ovviamente semplici) che però non conservano

---

70) Infatti nel caso (154) si vede che si ricade nello stesso tipo di funzione (Pu equianarmonica) per tre valori di  $\Lambda$  ( $0, \pm 1$ ), mentre nel caso (155) ciò accade solo per  $\Lambda=0$ , e per  $\Lambda=1$  si ottengono invece le funzioni trigonometriche ordinarie.

71) In particolare, gli integrali in questione non ricadono in nessuno dei casi trattati nel volume di GRÖBNER-HOFREITER, *Integraltafel*n (1. Teil), Ed. Springer, che contiene un'ampia collezione di integrali riconducibili ad integrali ellittici.

le aree;

b) cercare un'estensione delle FTG che conservi le aree, preparandosi a trovare dei risultati di aspetto complicato.

Sia il primo che il secondo procedimento portano in generale a più soluzioni. Tuttavia, a giudizio di chi scrive, un'estensione che non conservi le aree ha un minore interesse matematico, perché, in un certo senso, la dipendenza funzionale della  $F$  da  $A$  e  $T$  diviene abbastanza arbitraria, e soggetta a criteri soggettivi di scelta. Per questa ragione, accenneremo a un solo possibile esempio di soluzione di tale tipo (per  $n=3$ ) alla fine di questo paragrafo, senza discuterlo a fondo. Invece, un procedimento di estensione che conservi le aree, e che riproduca la FTG ordinaria per  $\Lambda = 0$ , deve seguire (come vedremo) delle linee piuttosto rigide, che permettono di trattare in modo unitario i vari possibili casi. E' allo studio di tale procedimento che verrà dedicata la maggior parte della trattazione di questo paragrafo.

Poiché la maniera più diretta per definire un'estensione che conserva le aree consiste nell'uso delle relazioni (101), analogamente a quanto già fatto nel caso dell'ordine 4 partiamo da un'espressione per  $S_3$  (estesa) che generalizzi la definizione deducibile dalle (41), e precisamente (con  $\alpha, \beta, B$  per il momento supposti reali):

$$S_3(x) = \frac{1 + \frac{1}{B} P'(\alpha x + \beta)}{1 - \frac{1}{B} P'(\alpha x + \beta)} \quad (156)$$

Nella (156) non sono stati di proposito indicati gli invarianti della  $P'$ : infatti, attraverso la relazione di omogeneità si può scegliere una qualunque  $P_u$  appartenente ad una famiglia con  $J = \text{cost.}$  ( $1 \geq J \geq -\infty$ ) definendo in modo opportuno le tre costanti  $\alpha, \beta, B$  che figurano nella (156). Più precisamente, detto  $t$  il parametro di omogeneità che fa passare da una  $P_u$  ad un'altra [eq.(32)],  $\alpha$  e  $\beta$  variano proporzionalmente a  $t^{-1}$ ,  $B$  proporzionalmente

a  $t^3$ . Se si vuole però che le costanti che figurano nella (156) si mantengano reali, si può passare solo da una  $\mathcal{P}u$  ad un'altra con lo stesso segno di  $g_3$ : e, dato che la (156) deve includere il caso particolare delle FTG ordinarie, deve essere  $g_3 \geq 0$ . Le  $\mathcal{P}u$  con lo stesso  $J$  e  $g_3 < 0$  intervengono soltanto nella definizione delle FTG estese sull'asse immaginario, analogamente a quanto già trovato per le FTG ordinarie (si vedano ad es. le eq. (38)).

La condizione  $S(0) = 0$  (si sopprime nuovamente da ora in poi l'indice 3) richiede che sia  $B = -\mathcal{P}'\beta$ ; poiché, senza perdita di generalità, si può sempre supporre  $\beta$  reale e compreso tra 0 e  $\omega_2$ , si ha  $B > 0$ . La scelta di  $\beta$  (che si deve ridurre a 1/3 del periodo reale per  $g_2 = 0$ ) fissa la relazione <sup>72)</sup> tra il periodo delle funzioni e il valore di  $m$ , definibile come il minimo argomento reale  $> 0$  per cui  $S(m) = \infty$ : è chiaro che si ha la relazione

$$\alpha m = 2(\omega_2 - \beta) \quad (157)$$

ove (è bene ricordare)  $\omega_2$  rappresenta il semiperiodo reale della  $\mathcal{P}u$ .

Per ricavare l'espressione di  $A^2$  e  $T^2$ , secondo il metodo già sperimentato, si deriva la (156) rispetto a  $x$ , ottenendo (con  $B = -\mathcal{P}'\beta$ :

$$\frac{T^2}{A^2} = \frac{\left(1 + \frac{\mathcal{P}'(\alpha x + \beta)}{\mathcal{P}'\beta}\right)^2}{-\frac{2\alpha}{\mathcal{P}'\beta} \mathcal{P}''(\alpha x + \beta)}$$

La condizione  $T^2(0) = 1$  fissa  $\alpha = -\frac{2\mathcal{P}'\beta}{\mathcal{P}''\beta} > 0$ , e finalmente si arriva alle espressioni (con  $u = \alpha x + \beta$ ):

$$\frac{A^2}{T^2} = \frac{\left(1 + \frac{\mathcal{P}'u}{\mathcal{P}'\beta}\right)^2}{4\left(\frac{\mathcal{P}''u}{\mathcal{P}''\beta}\right)} \quad (158)$$

---

72) Più avanti si vedrà infatti che, fissato  $\beta$ , resta determinato anche  $\alpha$ .

che risultano chiaramente indipendenti della particolare scelta della  $\wp_u$  nella famiglia  $\{J = \text{cost}, g_3 \geq 0\}$ , o, come si dirà da ora in poi per brevità, "indipendenti da  $t$ " (essendo  $t$  il parametro di omogeneità che fa passare da una  $\wp_u$  ad un'altra).

Qualunque sia la scelta di  $\beta$  (o meglio del rapporto  $f = \beta/\omega_2$ , che risulta indipendente da  $t$ )<sup>73)</sup>, le (108) mostrano che, lungo l'asse reale, ove  $\wp''u$  è sempre positivo, il comportamento delle funzioni  $A$  e  $T$  è sostanzialmente analogo a quello delle FTG ordinarie (con poli semplici nei punti ove  $u$  è nullo o è un multiplo del periodo della  $\wp$ ). Invece fuori dall'asse reale si ha una notevole differenza di comportamento, come conseguenza del fatto che, quando  $g_2 \neq 0$ , gli zeri di  $\wp''$  sono semplici: quindi in corrispondenza di tali punti sia  $A$  che  $T$  hanno dei punti di diramazione di tipo radice quadrata, ove le funzioni divergono. (Da questo punto di vista il comportamento delle varie funzioni si avvicina a quello delle FTG di ordine 4). I valori di tali punti di diramazione sono dati dalla relazione  $\wp_u = \pm \sqrt{\frac{g_2}{12}}$ , e per ogni scelta del segno si hanno due punti di tale tipo in un campo fondamentale, così che il numero totale di punti di diramazione in un tale campo ammonta a quattro, che possono essere uniti a due a due da opportuni tagli. La situazione si presenta in modo diverso, per  $g_2$  reale, a seconda che sia  $g_2 > 0$  ( $J < 0$ ) oppure  $g_2 < 0$  ( $J > 0$ ). Per  $g_2 > 0$  il valore di  $\wp_u$  in corrispondenza dei punti di diramazione è reale: ma, come già visto,  $u$  non può essere reale, e quindi deve essere (a meno di periodi) immaginario puro. I quattro valori possibili per  $u$ , in conseguenza delle ben note proprietà di simmetria delle funzioni di Weierstrass, de

---

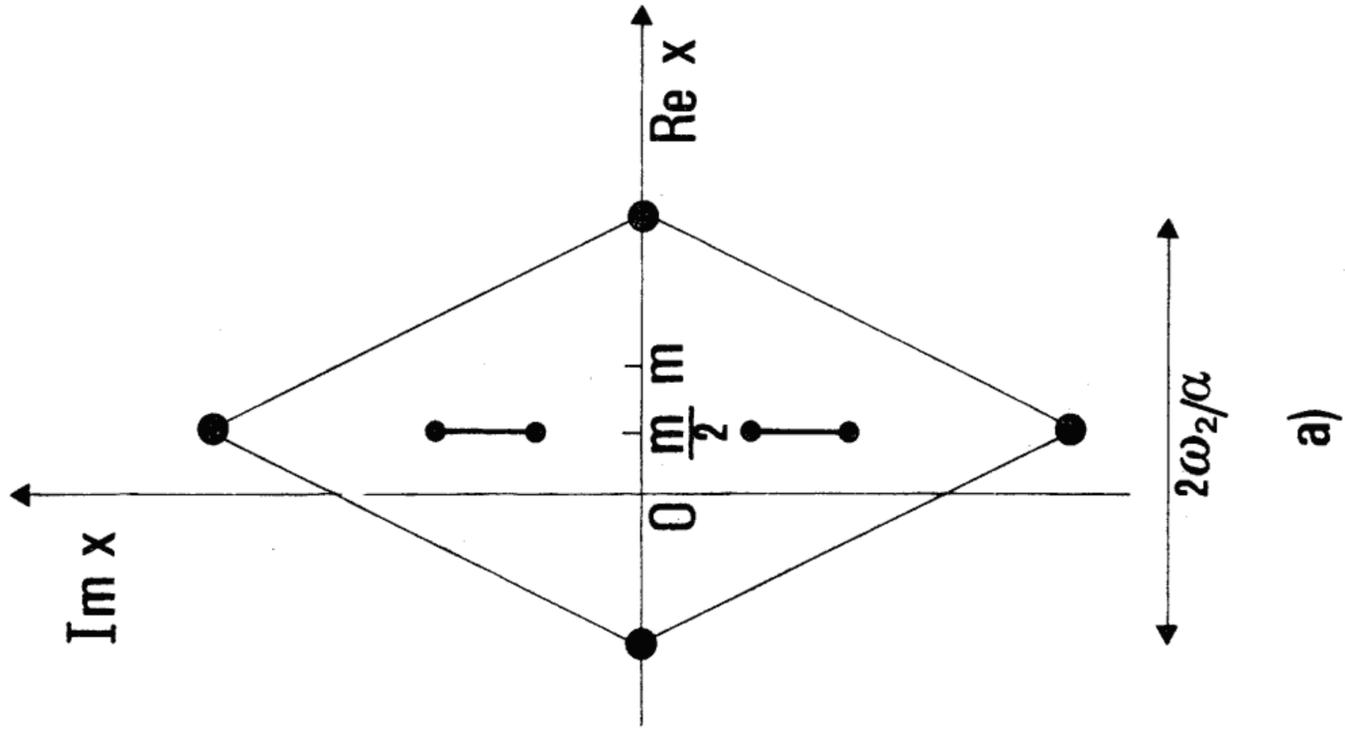
73) Vanno comunque sempre esclusi i valori estremi  $f = 0$  e  $f = 1$ , per cui nella (156) le costanti  $B$  e/o  $\alpha$  si annullano o divergono.

vono costituire due coppie simmetriche rispetto al centro del campo fondamentale ( $\omega_2$  o punti ad esso equivalenti), giacenti su una retta parallela all'asse immaginario. E' facile convincersi che la stessa cosa accade anche per  $A$  e  $T$ : per non avere l'asse reale intersecato da tagli, si possono unire fra loro i due punti di diramazione giacenti nella metà superiore del campo fondamentale, e i due giacenti nella metà inferiore, mediante un taglio rettilineo parallelo all'asse immaginario, come è mostrato in Fig. 19a, in cui è rappresentato lo schema del campo fondamentale di  $A$  e  $T$  includente l'origine (ove la parte reale dei punti di diramazione è  $\frac{m}{2}$ ). Invece per  $g_2 < 0$  i valori cercati di  $u$  (e di  $x$ ) [per cui  $\Phi u$  è immaginario puro] sono disposti (sempre per le proprietà di simmetria della  $\Phi u$ ) nei vertici di un rettangolo con i lati paralleli agli assi, centrato nel punto  $u = \omega_2(x=m/2)$  e analoghi, secondo lo schema di Fig. 19b: in questo caso i tagli vanno presi paralleli all'asse reale. Nel limite  $g_2 \rightarrow 0$  la coppia di punti di diramazione uniti da un taglio si "fondono" in un punto situato sulla parallela per  $m/2$  all'asse immaginario (ove  $\Phi u = 0$ ), dando luogo ad ulteriori poli semplici. Ne segue che l'uniformità delle FTG ordinarie, e le loro eccezionali proprietà di simmetria,<sup>74)</sup> appaiono come un fenomeno isolato e non "estendibile", a differenza del caso  $n=4$ , ove le FTG ordinarie rappresentano sì un caso di massima simmetria, ma senza sostanziali differenze rispetto al caso generale. Mentre le espressioni (156) e (158) permettono di risalire abbastanza agevolmente al comportamento delle FTG estese nel piano complesso,

---

74) Si pensi alle formule collegative, che ovviamente non possono valere per  $g_2 \neq 0$ , in quanto ad es.  $A$  e  $T$  hanno punto di diramazione divergenti,  $1/A$  e  $1/T$  li hanno non divergenti,  $S$  e  $1/S$  non li hanno affatto.

$g_2 > 0$



$g_2 < 0$

- polo
- punto di diramazione

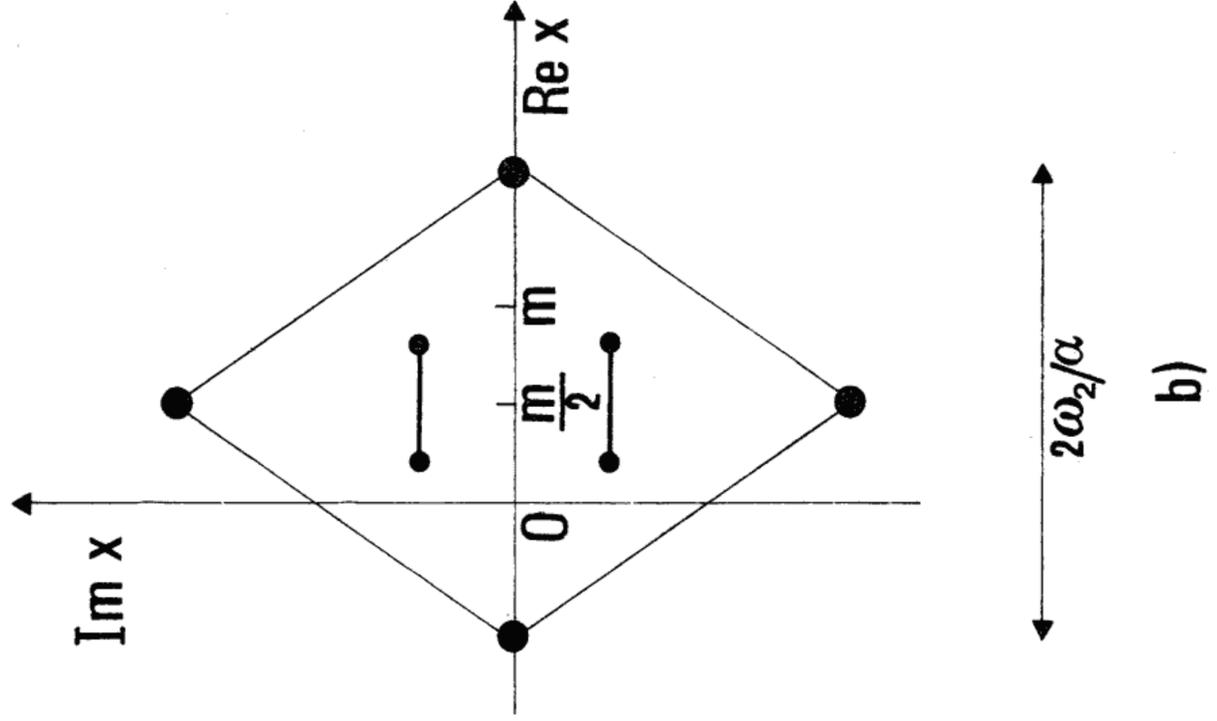


fig. 19

invece risulta più complicato ottenere le relazioni differenziali per tali funzioni, e la specificazione della funzione  $F(A,T)$  che entra nella relazione (91). A tale scopo, dalle (156) e (158) si possono ricavare le seguenti formule:

$$\frac{\rho'_{\alpha}}{\rho'_{\beta}} = \frac{T - A}{A + T} \quad (159)$$

$$\frac{\rho''_{\alpha}}{\rho''_{\beta}} = \frac{1}{(A+T)^2}$$

Inoltre, sfruttando le relazioni tra  $P, P'$  e  $P''$  si può eliminare  $P$  ed arrivare all'identità

$$\frac{2}{3} (\rho''_{\alpha} - g_2) \sqrt{\frac{\rho''_{\alpha}}{6} + \frac{g_2}{12}} = \rho'^2_{\alpha} + g_3 \quad (160)$$

Inserendo le (159) nella (160), e ponendo  $\eta = (T-A)^2$ ,  $\xi = (T+A)^2$ , si ottiene infine la relazione

$$\eta = -\kappa_3 \xi + C(1 - \kappa_2 \xi) \sqrt{\frac{1}{\xi} + \frac{\kappa_2}{2}} \quad (161)$$

ove appaiono le due costanti indipendenti da  $t$ :

$$\kappa_2 = \frac{g_2}{\rho''_{\beta}}, \quad \kappa_3 = \frac{g_3}{\rho'^2_{\beta}} \quad (162)$$

mentre la costante  $C = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(\rho''_{\beta})^{3/2}}{\rho'^2_{\beta}}$ , anch'essa indipendente da  $t$ , si può esprimere in termini di  $\kappa_2$  e  $\kappa_3$  ricordando che, quando  $\xi = 1$ , si deve avere  $\eta = 1$ , il che fornisce

$$C = \frac{1 + \kappa_3}{(1 - \kappa_2) \sqrt{1 + \frac{\kappa_2}{2}}} \quad (163)$$

Quanto alle determinazioni delle radici quadrate, poiché, per  $g_2$  e  $\mathcal{P}_\beta$  reali,  $\kappa_2$  non può mai essere inferiore a  $-2$ , nella (163) va presa la radice aritmetica. Quanto alla (161), la radice che vi figura è una funzione uniforme di  $x$ , e il suo segno si determina prendendo quello positivo nelle vicinanze di  $\xi = 1$ .

Ricordando che  $T^3 + A^3$  si può scrivere sotto la forma

$$T^3 + A^3 = \sqrt{\xi} \left( \frac{3}{4} \eta + \frac{1}{4} \xi \right)$$

dalla (161) e dalla (163) si deduce infine

$$T^3 + A^3 = \frac{1-3\kappa_3}{4} \xi^{3/2} + \frac{3}{4} (1+\kappa_3) \frac{\Phi(\kappa_2 \xi)}{\Phi(\kappa_2)} \quad (164)$$

con  $\Phi(z) = (1-z) \sqrt{1 + \frac{z}{2}}$

La (164) fornisce la relazione cercata, contenente solo le due costanti (indipendenti da  $t$ )  $\kappa_2$  e  $\kappa_3$ . Queste costanti dipendono però ancora in modo essenziale dalla scelta di  $\beta$  (o meglio di  $f = \beta/\omega_2$ ), soggetta al solo vincolo che, per le funzioni equianarmoniche ( $g_2=0$ ), si debba avere  $f = \frac{2}{3}$  (e insieme  $\kappa_2 = 0$ ,  $\kappa_3 = \frac{1}{3}$ , il che trasforma la (161) e la (164) nelle note formule valide per le FTG ordinarie).

Tale scelta non è stata finora fatta esplicitamente, perché di fatto esistono diversi criteri ragionevoli di definire il comportamento di  $f$  in funzione di  $J$  (o di  $\lambda$ ) in modo da soddisfare il limite sopraccennato: scelto uno di tali criteri, resta allora, univocamente determinato il comportamento di  $\kappa_2$  e  $\kappa_3$  in funzione di  $\lambda$ , benché in generale sia complicato esprimerlo mediante una formula esplicita. A differenza del caso  $n=4$ , in cui la procedura di estensione da preferire si raccomandava, per così dire, da sé, in questo caso si hanno diverse possibilità di scelta, nessuna delle quali dà luogo a formule semplici. (La curva parametrica può essere comunque sempre fa-

cilmente tracciata ricavando l'andamento di T-A in funzione di T+A dalla (161), e poi ruotando il grafico di 45° e ridefinendo la scala ).

Un'altra caratteristica della procedura di estensione sopradescritta (che verrà posta in evidenza negli esempi citati più avanti) è che i criteri di scelta più semplici per  $\beta$  non sono applicabili con continuità a tutti i valori di  $\lambda$  (partendo p.es. da  $\lambda = 1$  ed eventualmente estendendo la definizione, attraverso  $\lambda=0$ , anche ai valori negativi di  $\lambda$ ). Prima o poi si arriva infatti ad una "situazione singolare", in cui le formule che definiscono le FTG estese, o le legano tra loro, perdono di significato a causa dell'annullarsi o del divergere di alcune costanti che vi figurano. Un tipico esempio è dato dal verificarsi del caso limite  $\kappa_2 = -2$  (corrispondente a  $\Phi\beta = 0$ ) per cui la (163) perde di senso con tutte le formule ad essa connesse.

Benché, come già affermato, nessun criterio di scelta di  $\beta$  conduca a formule semplici, esiste una scelta particolare che porta ad espressioni meno complicate che negli altri casi: essa consiste nel porre  $\kappa_3$  identicamente uguale a  $\frac{1}{3}$  (cioè a prendere  $\Phi'\beta = -\sqrt{3g_3}$ ). In questo modo nella (164) il primo pezzo del secondo membro si annulla, e il coefficiente del secondo pezzo vale 1, così che si ha:

$$T^3 + A^3 = \Phi(\kappa_2 \xi) / \Phi(\kappa_2) \quad (165)$$

e non risultano neppure troppo complicate le formule di derivazione, ottenibili tramite l'espressione generale (96):

$$A' = T^2 \Phi(\kappa_2) \sqrt{1 + \frac{\kappa_2 \xi}{2} + \frac{1}{2} \kappa_2 \sqrt{\xi} (1 + \kappa_2 \xi)}$$

$$T' = -A^2 \Phi(\kappa_2) \sqrt{1 + \frac{\kappa_2 \xi}{2} - \frac{1}{2} \kappa_2 \sqrt{\xi} (1 + \kappa_2 \xi)}$$
(166)

Si può nuovamente usare la (165) e la definizione di  $\phi$  per eliminare la radice delle (166), ottenendo le espressioni delle derivate in forma razionale in  $A$  e  $T$ :

$$A' = T^2 \frac{A^3 + T^3}{1 - \kappa_2(A+T)^2} \cdot [\phi(\kappa_2)]^2 + \frac{1}{2} \kappa_2(A+T)(1 + \kappa_2(A+T)^2)$$

$$T' = -A^2 \frac{A^3 + T^3}{1 - \kappa_2(A+T)^2} [\phi(\kappa_2)]^2 - \frac{1}{2} \kappa_2(A+T)(1 + \kappa_2(A+T)^2)$$

Il parametro  $\kappa_2$  gioca qui il ruolo del parametro che distingue tra loro le varie famiglie di  $\mathcal{P}u$  (e per il quale, nella trattazione generale del §III.1, era stato usato il simbolo  $\lambda$ , qui invece utilizzato con altro significato). Per le  $\mathcal{P}u$  a invarianti reali, esso varia da un valore prossimo a .384 ( $\lambda = 1, J = -\infty$ ) per poi decrescere a zero per le  $\mathcal{P}u$  equianarmoniche ( $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}, J = 0$ ) e infine tendere a -2 per  $\lambda \rightarrow 0$  ( $J \rightarrow 1$ )<sup>75)</sup>. In corrispondenza,  $f$  varia da un valore prossimo a  $\frac{3}{4}$  per  $\lambda = 1$ , decresce a  $\frac{2}{3}$  per  $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , raggiunge un minimo, ripassa per il valore  $\frac{2}{3}$  quando  $\kappa_2 = -1$  ( $J = \frac{4}{5}, \lambda = .265577\dots$ ) per diventare 1 per  $\lambda = 0$ . E' chiaro che quest'ultima scelta dà luogo ad una situazione singolare, per cui le FTG estese non possono essere definite: non è quindi possibile estendere la validità delle formule precedenti al caso delle  $\mathcal{P}u$  con  $g_3$  negativo,<sup>76)</sup> salvo che non si prendano  $\alpha, \beta$  e  $B$  immaginari puri,

75) E' possibile di fatto ricavare una formula esplicita di  $\kappa_2$  in funzione di  $J$ , che tuttavia, essendo piuttosto farraginoso, non verrà riportata.

76) E' possibile evitare la situazione di singolarità per  $\lambda = 0$  con opportune scelte di  $\beta$ : la più ovvia di esse (che consiste nel prendere identicamente  $f = \frac{2}{3}$ ) tuttavia porta ad una situazione di singolarità quando si ritorna alle  $\mathcal{P}u$  equianarmoniche dalla parte dei  $g_3$  negativi ( $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ), in quanto per tali funzioni si ha  $\mathcal{P}\beta = 0, \kappa_2 = -2$ .

nel qual caso si ritrovano le formule ottenibili con l'applicazione della (32) con  $t=i$  nelle espressioni valide per  $g_3$  positivo. D'altro canto, non è nemmeno possibile cercare un'estensione delle FTG attraverso la generalizzazione delle (38) e delle formule loro connesse: infatti per avere le funzioni  $S, A^2, T^2$  prive di punti di diramazione è necessario in tali formule che sia  $P''_{\beta} = P'''_{\beta} = 0$ , il che è valido soltanto per  $g_2 = 0$ . E' questa un'altra manifestazione del carattere "speciale" e non generalizzabile delle FTG ordinarie.

Per concludere, resterebbe da discutere il problema delle regole di addizione e sottrazione, duplicazione, e simili: tuttavia, per la sua estrema complicazione, tale problema non verrà trattato.

Nel caso delle FTG di ordine 6, paradossalmente si verifica che il procedimento di estensione secondo le linee già viste è più semplice e immediato di quello per  $n=3$ , anche se le formule di arrivo vengono fuori sempre piuttosto complicate.

Si parte, come già fatto in precedenza, dalla generalizzazione delle (87), che forniscono le espressioni per  $S^3$  e  $\frac{1}{S^3}$ : se si vuole mantenere la caratteristica che tali due quantità siano date dalla stessa espressione con solo un segno di differenza, l'unica scelta possibile (e compatibile con la condizione  $S(0) = 0$ ) risulta la seguente

$$\begin{aligned} S^3(x) \\ \frac{1}{S^3(x)} \end{aligned} = \frac{1}{\sqrt{g_3}} \left[ \sqrt{P'^2(\alpha x) + g_3} \pm P'(\alpha x) \right] \quad (167)$$

Essendo tali quantità chiaramente indipendenti da  $t$  (la costante  $\alpha$  varia proporzionalmente a  $t^{-1}$ ) non è necessario specificare la scelta degli invarianti. Occorre però, se si vuole restare nel campo reale per valori reali dell'argomento, che sia  $g_3 > 0$ . Nel limite  $g_3 \rightarrow 0$  si ha chiaramente una situazione di singolarità.

Nella (167), come del resto nella (87), la radice quadrata deve cambiare di segno quando si passi da  $x$  a  $-x$ .

Derivando ambo i membri rispetto a  $x$  e imponendo che l'estensione conservi le aree, si ottiene:

$$\frac{1/A^2}{1/T^2} = \frac{\alpha}{3} g_3^{-1/6} \left[ \sqrt{P'^2(\alpha x) + g_3} + P'(\alpha x) \right]^{1/3} \frac{P''(\alpha x)}{\sqrt{P'^2(\alpha x) + g_3}} \quad (168)$$

e la condizione  $T^2(0) = 1$  fornisce

$$\alpha = 2^{2/3} g_3^{-1/6} \quad (169)$$

I punti di diramazione di  $S^3, \frac{1}{S^3}$  (e anche  $S$  e  $\frac{1}{S}$ ),  $A^2, T^2$ , sono, analogamente al caso ordinario ( $g_2 = 0$ ), quelli in cui si annulla l'espressione  $P'^2(\alpha x) + g_3$ . Ma mentre per  $g_2 = 0$  gli zeri di tale espressione (coincidenti con gli zeri di  $P(\alpha x)$ ) sono tripli, invece per  $g_2 \neq 0$  si hanno tre zeri distinti, uno dei quali corrisponde ancora a uno zero di  $P(\alpha x)$ , mentre gli altri due, quando  $g_2$  è reale, si trovano più o meno in posizione analoga a quella dei punti di diramazione indicati in Fig. 19. In questo modo le singolarità corrispondenti ai quattro punti di diramazione che definiscono le "stelle" di Fig. 9 sono ora dodici: vi sono diversi modi di unirle a due a due con opportuni tagli in modo che, nel limite  $g_2 \rightarrow 0$ , si ritrovino

le stelle in questione: ma questo problema non verrà discusso qui. Vedremo invece quali altre combinazioni di A e T (oltre a  $S^3 - \frac{1}{S^3}$ ) non hanno punti di diramazione. E' facile convincersi, dalle (168), che  $A^2 T^2$  è una di esse: infatti si ha (sfruttando anche la definizione (169) di  $\alpha$ ):

$$A^2 T^2 = \frac{9}{2} \left( \frac{g_3}{2} \right)^{1/3} \frac{P'^2 u + g_3}{P''^2 u} \quad (170)$$

ove si è posto  $u = \alpha x$ . Anche  $A^6 + T^6$  gode di questa proprietà: si può calcolare facilmente infatti la relazione

$$A^6 + T^6 = \frac{27}{2} \frac{(P'^2 u + g_3)^2}{P''^3 u} \quad (171)$$

Eliminando  $P'^2 u + g_3$  tra la (170) e la (171) si ottiene la seguente espressione per  $P'' u$ :

$$P'' u = \frac{3}{2} \left( \frac{g_3}{2} \right)^{2/3} \frac{A^6 + T^6}{A^4 T^4} \quad (172)$$

A questo punto si può ricavare la relazione che sostituisce la (80) sfruttando nuovamente la (160) (elevata al quadrato). Mediante uso opportuno della (171) e della (172) si arriva infine alla relazione

$$\begin{aligned} A^6 + T^6 &= 1 - \frac{3}{2} \frac{g_2}{P'' u} + \frac{1}{2} \left( \frac{g_2}{P'' u} \right)^3 = \\ &= 1 - \kappa \Psi + \frac{4}{27} (\kappa \Psi)^3 \end{aligned} \quad (173)$$

ove si è posto  $\Psi = \frac{A^4 T^4}{A^6 + T^6}$  e  $\kappa = \left( \frac{4g_2^3}{2g_3} \right)^{1/3}$ : questa costante

si può prendere come quella che discrimina tra loro le varie funzioni, e risulta chiaramente indipendente da  $t$ .<sup>77)</sup>

---

77) Per le  $Pu$  con  $\Delta > 0$ ,  $\kappa$  varia da  $3 \cdot 2^{2/3}$  (in corrispondenza di  $\lambda = 1$ ) a  $\kappa = -\infty$  (in corrispondenza di  $\lambda = 0$ , che, come già detto, dà luogo a una situazione singolare).

La (173) ha il vantaggio (rispetto al caso già discusso di  $n=3$ ) di essere univoca e di esibire in maniera esplicita l'espressione della  $F(A,T) \equiv F(\psi)$ : tuttavia da essa non è possibile dedurre un'espressione esplicita che permetta di costruire la curva parametrica (quale invece è la (161)).

Resta da concludere con le espressioni differenziali  $A'$  e  $T'$ : esse possono ovviamente essere calcolate mediante la (97), ma qui si preferirà riportare una forma leggermente modificata attraverso l'uso della (173), in modo che risulti evidente la validità della relazione (100):

$$A' = \frac{1}{T} \left[ \frac{2A^6 - T^6}{A^6 + T^6} - \frac{2(A^6 - T^6)}{1 - \frac{2}{3} \kappa \psi} \right]$$

$$T' = \frac{1}{A} \left[ \frac{2T^6 - A^6}{A^6 + T^6} - \frac{2(A^6 - T^6)}{1 - \frac{2}{3} \kappa \psi} \right]$$

Come nel caso  $n=3$ , altre possibili formule (di duplicazione, ecc.) non verranno discusse a causa della loro complicazione.

In contrasto con la farraginosità dei calcoli precedenti, vogliamo ora presentare brevemente (per  $n=3$ ) un esempio di una possibile estensione semplice che non conserva le aree, ma per cui vale la relazione (99). Poiché, anche con questo vincolo, la funzione  $F(A,T) = F(A+T)$  può essere scelta con una certa arbitrarietà, si può imporre che sia mantenuta un'ulteriore relazione valida per  $g_2=0$ . Scegliendo a tale scopo la prima delle (40) (in cui però la definizione dell'argomento  $u$  della  $\mathcal{P}$  deve essere opportunamente specificata), si porrà dunque:

$$\frac{1}{A+T} (x) = \frac{P(\alpha x + \beta)}{P\beta}$$

Derivando rispetto a  $x$  e sfruttando la (99)

$$\frac{T-A}{T+A} = - \frac{\alpha}{P\beta} P'(\alpha x + \beta)$$

Ne segue  $\alpha = - P\beta/P'\beta$  e, mettendo insieme le due equazioni:

$$\frac{A}{T} = \frac{P\beta}{2Pu} \left( 1 + \frac{P'u}{P'\beta} \right)$$

con  $u = \alpha x + \beta$ . Confrontando con la precedente estensione che conserva le aree, si trova che l'espressione formale per  $S$  resta la stessa, mentre quelle per  $A$  e  $T$  sono differenti a causa della sostituzione

di  $\sqrt{\frac{P''u}{P''\beta}}$  con  $\frac{Pu}{P\beta}$ ; il che, ovviamente, porta a proprietà ana

litiche molto più semplici, e simili a quelle delle FTG ordinarie.

La relazione (91) si determina immediatamente scrivendo la (31), che fornisce

$$(T-A)^2 = \frac{1+\kappa_2+\kappa_3}{T+A} - \kappa_2(T+A)^2 - \kappa_3(T+A)^3 \quad (174)$$

ove si è posto  $\kappa_3 = \frac{g_3}{P'\beta^2}$  (come nel caso che conserva le aree) e

$\kappa_2 = \frac{g_2 P\beta}{P'\beta^2}$  (entrambe le costanti sono indipendenti da  $t$ ). La

scelta di  $\beta$  (anzi, di  $f = \beta/\omega_2$ ) fissa definitivamente entrambe queste costanti, con i soliti valori da assumere per tali quantità quando  $g_2 = 0$ .

Scrivendo per  $T^3 + A^3$  l'espressione già vista in precedenza si ottiene infine:

$$T^3 + A^3 + \frac{3}{4} \kappa_2 [(T+A)^2 - 1] - \frac{1-3\kappa_3}{4} [(T+A)^3 - 1] = 1 \quad (175)$$

Conviene anche qui specificare alcune possibili scelte di  $\beta$ . Prendendo  $\kappa_3 = \frac{1}{3}$  e ponendo  $\Lambda = \frac{3}{4} \kappa_2$ , la (175) si specifica così:

$$T^3 + A^3 + \Lambda [(T+A)^2 - 1] = 1$$

Il valore di  $\Lambda$ , quando  $\lambda$  decresce a partire da 1, decresce da un valore positivo prossimo a .93 fino a -1 (valore ottenuto per  $\lambda = 0$ ). In tal caso, però, non si ha una situazione singolare, perché, effettuando gli opportuni procedimenti di limite nelle equazioni precedenti, si arriva per  $A$  e  $T$  a funzioni razionali di  $x$ . E' possibile passare anche al caso dei  $\lambda$  negativi, ma in questo caso  $\beta$  diviene immaginario.

Un'altra scelta interessante si ottiene ponendo  $\rho_\beta = g_3^{1/3}$ . In questo caso si controlla facilmente che  $1-3\kappa_3 = -\kappa_2$ , così che la (175) assume la forma (con  $\Lambda = \kappa_2/4$ ):

$$A^3 + T^3 + \Lambda [(T+A)^3 + 3(T+A)^2 - 4] = 1$$

Il valore  $\Lambda = -\frac{1}{4}$  (corrispondente a  $\lambda = 0$ ) nuovamente non dà luogo a una situazione singolare, ma produce ancora per  $A$  e  $T$  delle funzioni razionali di  $x$ . Invece si ha una situazione singolare nel limite  $\lambda \rightarrow \pm 1$ , per cui  $\rho'_\beta \rightarrow 0$  e quindi  $\kappa_2$  diverge.

Le formule differenziali per le varie funzioni non verranno date, perché sono immediatamente ottenibili a partire dalle (95). Quanto al valore della doppia area  $a(x)$  del settore associato alla curva pa-

rametrica (la cui costruzione è immediata a partire dalla (174)), essa si ottiene dalla formula generale (98), e, nei casi sopradescritti, richiede integrali sulla  $\mathbb{P}^1$  la cui formula risolutiva, pur dando luogo a quantità reali, richiede l'introduzione di immaginari (si veda al proposito il manuale di GRÖBNER-HOFREITER citato nella precedente nota<sup>71)</sup>).

Per concludere, diremo che sono stati sviluppati ampiamente i calcoli relativi all'argomento di questo paragrafo, nonostante l'aspetto insoddisfacente dei risultati, proprio per rendere chiaro, al di là di ogni dubbio, il fatto che la procedura di estensione delle FTG di ordine  $\neq 4$  non è adatta per descrivere convenientemente la classe delle funzioni ellittiche; e da questo punto di vista, per così dire, negativo, appare logica l'omissione degli sviluppi dell'argomento implicanti complicazioni eccessive.

*L'Autore di questo studio desidera ringraziare vivamente il Prof. W. GROSS dell'Istituto Matematico dell'Università di Roma per una lettura critica del manoscritto, e il Prof. G. ANDREASSI, Direttore dei "Quaderni di Lecce", per l'interesse che ha sempre mostrato in questo lavoro.*