con opportune modifiche alle formule (2) e (4), in modo da introdurre una dipendenza da un parametro addizionale e descrivere così l'intera classe delle funzioni ellittiche (con speciale attenzione verso quelle a invarianti reali). Questi sviluppi porteranno a risultati soddisfacenti, tali da poter parlare di un nuovo modo di presentare le funzioni ellittiche.

PARTE I

LE FTG COME FUNZIONI DI VARIABILE REALE

I - Definizion delle FTG.

Per la definizione delle FTG come funzioni di una variabile reale x si generalizza una delle possibili definizioni delle funzioni $\sin x$, $\cos x$ nella seguente maniera:

Si dicono $A_n(x)$ e $T_n(x)$ rispettivamente l'ordinata e l'ascissa di un punto della curva $\xi^n + \eta^n = 1$ (giacente nel piano cartesiano $\xi\eta$), tale che il raggio vettore per quel punto, il semiasse positivo ξ e la curva in questione delimitino un settore di area $\frac{1}{2}x$.

Affinché la definizione data abbia senso, n deve essere positivo. In tal caso, la curva nel piano $\xi\eta$ (che sarà chiamata "curva parametrica") passa per i punti $(1,0)$ e $(0,1)$, ed è certamente definita nel primo quadrante. Le funzioni possono quindi essere sempre definite in un intervallo della variabile x compreso tra $x = 0$ (ove $A_n = 0$, $T_n = 1$ per ogni $n>0$) e un valore positivo di x, dipendente da n e chiamato m_n, uguale al doppio dell'area (finita) delimitata dalla curva parametrica nel primo quadrante. E' evidentemente $A_n(m_n) = 1$, $T_n(m_n) = 0$. Il valore di m_n è facilmente calcolabile: si ha

$$m_n = 2\int_0^1 (1-\xi^n)^{1/n}\, d\xi = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} \qquad (5)$$

Casi particolari: $m_1=1, m_2=\pi/2$, $m_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\,\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \Gamma^{-3}\left(\frac{2}{3}\right)$,

$$m_4 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right),\quad m_6 = 2^{-2/3}\,3^{1/2}\,m_3,\quad \lim_{n\to 0} m_n = 0,\quad \lim_{n\to\infty} m_n = 2$$ [2]

Come nel caso delle funzioni trigonometriche, in tale intervallo vale la relazione

$$A_n(x) = T_n(m_n - x) \tag{6}$$

a causa della simmetria della curva parametrica rispetto alla bisettrice del primo quadrante.

Tuttavia è chiaro che i valori di n per cui le FTG sono definibili solo in un intervallo limitato dell'asse reale hanno scarso interesse. E' bene quindi concentrare l'attenzione sui valori di n per cui la curva parametrica può estendersi al di fuori del primo quadrante, in modo da permettere la definizione delle FTG possibilmente per tutti i valori di x. Tutti i valori interi positivi di n permettono questa estensione. La cosa è anche possibile per n razionale con denominatore dispari, se per ξ reale, si assume la definizione $(-\xi)^{1/q} = -\xi^{1/q}$ (q dispari). Tuttavia,per evitare inutili appesantimenti, la discussione verrà portata avanti solo per n intero positivo [3], salvo che in alcuni passi facilmente riconoscibili.

Si vede immediatamente che le due sottoclassi con n pari e dispari presentano un andamento completamente diverso. Con n pari, la curva parametrica è chiusa, e le funzioni sono immediatamente definibili per ogni x: esse risultano periodiche di periodo $4m_n$, e per esse valgono relazioni analoghe a quelle che sono soddisfatte dalle funzioni trigonometriche nel caso di archi supplementari, esplementari, etc.[4] E' pure immediato controllare

---

2) Questi limiti, come pure i valori di m_1 e m_2, si possono trovare direttamente dall'esame della curva parametrica, che in tali casi assume forme tali da consentire un calcolo immediato delle aree.

3) Se $n=p/q>0$ (q dispari),le considerazioni svolte a proposito delle parità di n si applicano alla parità di p.

4) La (6) è invece valida per tutti gli n, per la simmetria della curva parametrica rispetto alla retta $\eta-\xi = 0$.

che $A_2(x) = \sin x$, $T_2(x) = \cos x$.

Per n dispari, invece, la curva parametrica è aperta e si estende sino all'infinito, mantenendosi sempre alla destra della retta $\eta+\xi = 0$ che, quando $n>1$, rappresenta il suo asintoto.[5] Nei casi in cui l'area compresa tra la curva parametrica e tale retta sia infinita, mentre il punto rappresentativo percorre la curva parametrica la variabile x assume tutti i valori reali tra $-\infty$ e $+\infty$, e le funzioni $A_n(x)$ e $T_n(x)$ risultano monotone e divergenti all'infinito.[6] Ciò accade certamente per $n \leq 1$. Il caso $n=1$ è di immediata soluzione: si ottiene infatti

$$\begin{aligned} A_1(x) &= x \\ T_1(x) &= 1-x \end{aligned} \qquad (7)$$

Nei casi in cui invece la superficie compresa tra la curva parametrica e la retta $\eta+\xi = 0$ sia di area finita, la definizione delle FTG è limitata all'intervallo $-b_n < x < m_n+b_n$, in cui $b_n > 0$ è il doppio dell'area di quella parte della superficie predetta contenuta nel secondo (o nel quarto) quadrante del piano $\xi\eta$. I punti $x = -b_n$ e $x = m_n+b_n$ sono certamente punti di singolarità per le funzioni A_n e T_n. Tuttavia in questi casi si può pensare di "periodare" tali funzioni supponendo che il punto rappresentativo possa percorrere ripetutamente la curva parametrica passando attraverso il punto all'infinito di tangenza con l'asintoto (cioé uscendo dal ramo superiore della curva per rientrare da quello inferiore). In tal caso le FTG con n dispari risulteranno periodiche con periodo m_n+2b_n e presenteranno lo stesso tipo di singolarità nei punti $x = -b_n+k(m_n+2b_n)$ con k intero.

---

5) Come esempio di curva di questo tipo, si veda quello per $n=3$ riportata più avanti in Fig. 1.

6) Si è tacitamente supposto che le funzioni ottenute siano continue per tutti i valori di x per i quali il punto rappresentativo è contenuto all'interno della curva parametrica, essendo la cosa piuttosto intuitiva. Tuttavia è possibile dare una dimostrazione rigorosa di questo fatto.

Resta da determinare:

1) per quali valori di n l'area tra la curva e l'asintoto è finita,

2) quale è il valore di b_n.

La risposta a queste domande si ottiene scrivendo materialmente l'espressione per l'area corrispondente a b_n nel quarto quadrante. Tenendo presente la struttura della curva quale è mostrata in Fig. 1, si ha

$$\frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2} + \int_1^\infty [(1-\xi^n)^{1/n}+\xi] d\xi = \frac{1}{2} + \int_1^\infty \xi [1-(1-\xi^{-n})^{1/n}] d\xi$$

Nel secondo integrale, la parte in parentesi quadra tende a zero come ξ^{-n} per $\xi \to \infty$; ne segue che la condizione di convergenza dell'integrale è $n>2$. Quindi le FTG con n dispari > 2 risulteranno periodiche, con infinite singolarità sull'asse reale.

Il calcolo esplicito dell'integrale sopra riportato fornisce (per $n>2$):

$$b_n = \frac{1}{n} B(1-\frac{2}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \frac{\Gamma(1-\frac{2}{n})\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(1-\frac{1}{n})} \tag{8}$$

Confrontando con la (5), e sfruttando le proprietà della funzione Γ, si ottiene:

$$\frac{b_n}{m_n} = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{n}} \tag{8'}$$

Si trova l'importante risultato $b_3 = m_3$: le FTG di ordine 3 sono periodiche con periodo $3m_3$. Una valutazione numerica di questa costante mostra che essa è ottimamente approssimata dal numero decimale 5.3; si ha infatti $3m_3 = 5.29991625......$

I.2. <u>Il sistema differenziale delle FTG</u>.

Dobbiamo ora ricavare il sistema differenziale (4), che costituisce la proprietà più interessante delle FTG, a partire dalla definizione data nel precedente paragrafo. Esso si ottiene immediatamente applicando il teorema di Dini al seguente sistema di due equazioni, che definiscono implicitamen te le due funzioni A_n, T_n aventi per argomento la variabile x:

$$\begin{aligned} &[A_n]^n + [T_n]^n = 1 \\ &\frac{1}{2} A_n T_n + \int_{T_n}^{1} (1-\xi^n)^{1/n}\, d\xi = \frac{1}{2} x \end{aligned} \tag{9}$$

La prima equazione non è che la (2), ed esprime il fatto che il punto rappresentativo in base al quale sono definite le funzioni A_n e T_n giace sulla curva parametrica: la seconda equazione afferma che l'area del settore richiamato nella definizione di tali funzioni vale proprio $\frac{x}{2}$. 7)

Qualunque scelta di x, A_n, T_n ottenuta collocando il punto rappresentativo all'interno della curva parametrica fornisce un "punto soluzione"; lo jacobiano delle equazioni (9) rispetto a A_n e T_n vale $\frac{n}{2}$, e quindi è sempre non nullo, garantendo così l'esistenza e l'unicità della soluzione in un intorno di ciascuno di essi.8)

---

7) La cosa è evidente quando il punto rappresentativo giace sulla porzione della curva parametrica contenuta nel primo quadrante; ma è facile controllare che, nei casi in cui la curva si può estendere al di fuori di esso, le (9) restano valide entro tutto l'intervallo proprio di definizione [che risulta, per le funzioni periodabili, $(-2m_n, 2m_n)$ per quelle di ordine pari, $(-b_n, m_n+b_n)$ per quelle di ordine dispari].
Per $n<1$ non possono essere presi come punti soluzione le scelte $x=0$, $A_n=0, T_n=1$ e $x=m_n, A_n=1$, $T_n=0$, perché in essi le derivate parziali delle (9) rispetto a A_n o T_n divergono; tuttavia le funzioni possono essere definite anche in questi casi con un procedimento di limite.

8) Nel calcolo dello jacobiano, e in genere nel calcolo di tutte le derivate connesse al sistema (9), si deve tener conto, quando è necessrio, della prima di tali equazioni (p.es., si può identificare $(1-T_n^{\,n})^{1/n}$ con A_n perché ciò è verificato per tutti i punti soluzione che ci interessano).

L'applicazione del teorema di Dini, come già detto, permette di ricavare dal sistema (9) $\frac{dA_n}{dx}$ e $\frac{dT_n}{dx}$, per cui si ottengono le espressioni (4).

Introducendo ora la funzione $S_n(x) = A_n(x)/T_n(x)$ e il suo inverso $1/S_n(x)$ (che, per n = 2, si riducono rispettivamente a tg x e cotg x) si ricava immediatamente

$$\frac{dS_n(x)}{dx} = \frac{1}{[T_n(x)]^2}$$

$$\frac{d[1/S_n(x)]}{dx} = -\frac{1}{[A_n(x)]^2} \qquad (10)$$

E' interessante notare che i secondi membri delle (10) hanno lo stesso aspetto qualunque sia l'ordine n.

Una prima considerazione da fare a proposito del sistema (4) è che, quando n non è intero, effettuando un numero opportuno di derivate successive delle funzioni A_n e T_n, si arriva sempre a potenze di tali funzioni con esponenti negativi: quindi i punti $x = 0$ e $x = m_n$, in cui una delle due funzioni si annulla, devono necessariamente essere dei punti di singolarità delle funzioni (e di ciò si dovrà tener conto per una eventuale estensione delle funzioni al campo complesso). Invece, quando n è intero, le derivate successive di A_n e T_n di ordine comunque elevato saranno sempre dei polinomi in A_n e T_n; quindi in particolare il punto $x = 0$ sarà un punto di regolarità delle funzioni, e in un intorno opportuno di tale punto esse potranno essere sviluppate in serie di potenze con applicazione della formula di Taylor.

A proposito di tale sviluppo è facilmente dimostrabile il seguente teorema, che pone in luce un'altra notevole analogia con le funzioni trigonometriche:

Lo sviluppo in serie di Taylor delle FTG di ordine intero n nel punto $x = 0$ procede per potenze di x^n; in particolare si ha

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 1 + \alpha_1 x^n + \alpha_2 x^{2n} + \dots \\ A_n(x) &= x(1+\beta_1 x^n + \beta_2 x^{2n} + \dots) \end{aligned} \tag{11}$$

Nella dimostrazione di queste formule, supponendo fissato una volta per tutte il valore di n, sopprimiamo per ragioni di semplicità l'indice n dai simboli delle funzioni [9]. Iniziamo a considerare un'espressione del tipo $A^k P(T)$, in cui l'intero k soddisfa $0<k<n$, e $P(T)$ indica un polinomio in T. Derivando tale espressione rispetto a x, e utilizzando le (4) si ottiene $(P'(T) = \frac{dP(T)}{dT})$:

$$\frac{d}{dx} A^k P(T) = kA^{k-1} T^{n-1} P(T) - A^k P'(T) A^{n-1} = A^{k-1} P_1(T)$$

in cui $P_1(T)$ è di nuovo un polinomio in T, definito da

$$P_1(T) = kT^{n-1} P(T) - (1-T^n) P'(T) \quad .$$

Supponiamo ora che una certa derivata di A o T sia riconducibile a un polinomio in $T, Q(T)$. La derivata successiva sarà data da $A^{n-1} Q'(T)$.

Per il risultato ottenuto in precedenza, derivando una seconda volta, una terza... si ottengono sempre espressioni del tipo $A^k P(T)$, in cui l'esponente di A diminuirà di 1 a ogni passo. Dopo n derivazioni si arriverà nuovamente a un polinomio in T.

Ma un'espressione come $A^k P(T)$ $(k>0)$ calcolata in $x = 0$ è sempre

---

9) Questa soppressione verrà effettuata spesso in questo lavoro senza timore di generare confusione. Infatti, a differenza delle classi di altre funzioni dipendenti da un parametro (come p.es. le funzioni di Bessel) per cui esistono relazioni di ricorrenza e differenziali che legano tra loro funzioni aventi valori diversi di tale parametro, per le FTG di un dato ordine n tutte le relazioni che legano tali funzioni restano all'interno dell'ordine n, così che solo in casi particolari è necessario specificarne esplicitamente il valore nei simboli.

nulla. Quindi si vede che, partendo da un qualunque polinomio in T, le successive $n-1$ derivate saranno nulle in $x = 0$, e solo l'n-esima derivata potrà essere non nulla; e, a partire da essa, il discorso si ripete. Ma la funzione T è essa stessa un polinomio in T (che per $x = 0$ vale 1), mentre per la funzione A la derivata prima è un polinomio in T (che per $x = 0$ vale 1). In questo modo l'applicazione della formula di Taylor porta al risultato (11).

Quanto al valore dei coefficienti α_h e β_h $(h=1,2...)$ l'autore della presente nota non è riuscito a trovare una formula che li esprima (neppure di tipo ricorrente) anche nel caso non banale più semplice $(n=3)$. Tuttavia, considerando separatamente gli sviluppi (11) ordine per ordine, è possibile ricavare alcune proprietà dei coefficienti suddetti che mostrano notevoli analogie con il caso degli sviluppi di $\sin x$ e $\cos x$. In particolare, si può mostrare che i coefficienti della (11) sono tutti non nulli e di segno alternato; e che, se si definiscono le funzioni iperboliche generalizzate (a cui si è già accennato nell'introduzione) prendendo come curva parametrica la $\xi^n - \eta^n = 1$, si ottengono ancora sviluppi di tipo (11) con gli stessi coefficienti, però tutti con il segno positivo. Per non appesantire il presente lavoro, i risultati di queste indagini verranno riportati in una pubblicazione a parte.

I.3. Alcune proprietà delle funzioni di ordine 3.

Le funzioni di ordine 3, come già ricordato, costituiscono il più semplice esempio non banale di FTG, e godono di numerose e interessanti proprietà di simmetria, alcune delle quali non riscontrate per nessun altro ordine. Molte di queste proprietà possono essere ricavate mediante lo studio delle funzioni sull'asse reale, e servire di utile indicazione per l'estensione della loro definizione a tutto il piano complesso. Riteniamo utile riportare i risultati più interessanti, che poi varranno ripresi nella Parte II. Naturalmente per gli altri ordini trattati in questo lavoro le funzioni saranno direttamente prese in esame nel campo complesso (Parte II).

Nelle Figure qui annesse sono riportati i grafici più interessanti connessi a tali funzioni. Fig. 1 riporta la curva parametrica $\xi^3+\eta^3=1$ in base a cui le funzioni sono definite, con alcune indicazioni connesse alla procedura di definizione. Fig. 2 mostra l'andamento delle funzioni A,T,S, 1/S,1/A,1/T [10] su un periodo, scelto tra due singolarità successive(le singolarità delle funzioni sono $-m+3km$ per A e T, $3km$ per 1/A e 1/S, $m+3km$ per 1/T e S, con k intero qualsiasi). Il fatto che S e $\frac{1}{S}$ siano continue nei punti in cui A e T divergono, e valgano ivi -1, è di immediata verifica: dalla definizione data si vede infatti che S e $\frac{1}{S}$ sono rispettivamente la tangente e la cotangente dell'angolo ϕ mostrato in Fig. 1.

La cosa che attira subito l'attenzione è l'apparente identità delle sei curve rappresentative mostrate in Fig. 2, a meno di traslazioni o cambiamenti di segno. In realtà questo fatto esprime una proprietà caratteristica delle FTG di ordine 3, che è tipica <u>solo</u> di quest'ordine: e cioé che le sei funzioni A,T,-S,1/A,1/T,-1/S si trasformano l'una nell'altra sotto un'opportuna traslazione, o per cambiamento di segno della variabile, o per entrambe le cose.(Per gli altri ordini, attraverso la (6) e le formule analoghe, le funzioni sono riconducibili in tal modo l'una all'altra soltanto a coppie). Valgono cioé le <u>formule collegative</u> che permettono di esprimere in modo immediato, p.es., l'effetto che produce sulle funzioni il cambiamento di segno della variabile x:

$$A(-x) = -S(x) \tag{12}$$

$$T(-x) = 1/T(x) \tag{13}$$

combinando la (12) e la (13) con la (6) e con le formule da essa derivate si arriva alla seguente tabella I, che permette di passare da una ad un'altra qualsiasi delle sei funzioni in questione:

---

10) Anche in questo paragrafo verrà sistematicamente soppresso l'indice 3 che designa l'ordine delle funzioni.

	A	T	-S	1/A	1/T	-1/S
A(x) =	x	m-x	-x	2m-x	x-m	x+m
T(x) =	m-x	x	x-m	x+m	-x	2m-x
-S(x) =	-x	m+x	x	x-m	2m-x	m-x
1/A(x) =	2m-x	x-m	x+m	x	m-x	-x
1/T(x) =	m+x	-x	2m-x	m-x	-x	x-m
-1/S(x) =	x-m	2m-x	m-x	-x	x+m	x

TABELLA I

Nella compilazione della Tabella si è talvolta tenuto conto della periodicità 3m di tutte le funzioni, p.es. sostituendo x+m a x-2m. L'esistenza delle formule collegative è sostanzialmente dovuta al fatto che (a parte il segno) la derivata di ciascuna delle sei funzioni in questione è data dal quadrato di un'altra. Infatti, alle (4) che ora si scrivono(indicando la derivata con un apice):

$$A' = T^2 \qquad T' = -A^2 \tag{14}$$

si aggiungono le (10)

$$S' = \left(\frac{1}{T}\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{S}\right)' = -\left(\frac{1}{A}\right)^2 \tag{15}$$

e le seguenti due formule, immediatamente deducibili

$$\left(\frac{1}{T}\right)' = S^2 \qquad \left(\frac{1}{A}\right)' = -\left(\frac{1}{S}\right)^2 \tag{16}$$

Dato che l'esponente a secondo membro delle (10) è fisso, è evidente che questa proprietà si può verificare solo per l'ordine 3.

La dimostrazione delle (12) e (13) può essere fatta a partire da quanto è stato sinora acquisito [11]. Sfruttando le formule

$$A = (1-T^3)^{1/3} \qquad T = (1+S^3)^{-1/3} \tag{17}$$

si possono trovare le derivate delle funzioni inverse di A e S che verranno impropriamente denominate arcA, arcS:

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{arcA}(x) = (1-x^3)^{-2/3} \qquad \frac{d}{dx}\,\mathrm{arcS}(x) = (1+x^3)^{-2/3} \tag{18}$$

Consideriamo ora la funzione $\mathrm{arcA}[-S(x)]$, la cui derivata, applicando la legge della derivazione delle funzioni composte, risulta (cfr. eq.(17))

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{arcA}[-S(x)] = (1+S^3)^{-2/3}[-\frac{1}{T^2}] = -1$$

da cui $\mathrm{arcA}\,[-S(x)] = -x+\mathrm{cost.}$

e la costante si trova essere nulla ponendo $x = 0$ e ricordando che $\mathrm{arcA}(0) = 0.$[12]

E' così dimostrata la (12). La (13) ed eventuali altre formule dello stesso tipo si possono dimostrare nello stesso modo.

Visto che la funzione $1/A$ nel suo punto di singolarità $x= 0$ si comporta come $1/x$ (v. lo sviluppo (11)), le formule collegative mostrano che tutte le sei funzioni considerate nei loro punti singolari hanno delle singolarità di primo ordine. Inoltre le(12)e le(13)permettono di ricostruire immediatamente dagli sviluppi (11) (con n=3) gli sviluppi delle funzioni $S(x)$ e $1/T(x)$. [13]

---

11) E'possibile anche una dimostrazione che fa uso delle funzioni ellittiche (v.Parte II); ma essa risulta molto più complicata.

12) Lo stesso risultato si ottiene anche a partire dalla funzione $\mathrm{arcS}[-A(x)]$

13) Essendo i coefficienti degli sviluppi (11) a segno alternato, si vede che per n=3 gli sviluppi di $S(x) = -A(-x)$ e $1/T(x) = T(-x)$ hanno gli stessi coefficienti, tutti con segno positivo; e,per quanto detto alla fine del §I.2, S e $1/T$ si possono identificare con le funzioni iperboliche generalizzate(che indicheremo con i simboli Ah,Th). Questa relazione tra FTG e funzioni iperboliche può essere provata anche direttamente dalla definizione.

Mentre per le funzioni trigonometriche ordinarie le combinazioni (di tipo simmetrico o antisimmetrico) $\sin x \cos x$, $\sin x \pm \cos x$ sono riconducibili a $\sin x$ e $\cos x$ attraverso le formule di duplicazione e prostaferesi, per l'ordine 3 le corrispondenti funzioni di A e T, e cioé AT, $A \pm T$ hanno un andamento radicalmente diverso. Si tratta di funzioni che presentano una simmetria rispetto a $\frac{m}{2}$: i loro diagrammi sono riportati in Fig. 3. La funzione $A+T$ è limitata tra zero e $2^{2/3}$, e nei punti $-m+3km$ ove A e T divergono si annulla con uno zero doppio [14]. Ma la proprietà più interessante delle combinazioni simmetriche $AT, A+T$ è che le loro funzioni inverse (che verranno impropriamente denominate $\operatorname{arc}AT, \operatorname{arc}(A+T)$) hanno per derivate delle espressioni che contengono radici quadrate anziché radici cubiche (come in (18)). Precisamente, sfruttando le relazioni

$$(T^3-A^3)^2 = 1-4A^3T^3 \tag{18'}$$

$$(T-A)^2 = \frac{4-(A+T)^3}{3(A+T)} \tag{18''}$$

(che discendono direttamente dalla $T^3+A^3=1$), si ottiene [15]

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} AT(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1-4x^3}} \tag{19}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc}(A+T)(x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x(4-x^3)}} \tag{20}$$

---

14) Se non si vuole ricorrere alle funzioni ellittiche, questo si può mostrare scrivendo $A(x)+T(x) = T(x)[1+S(x)] = \frac{1}{A(m+x)}[1-T(m+x)]$ (v.Tabella I) Per $x \to -m$, ricordando gli sviluppi (11) si arriva subito al risultato.

15) Il doppio segno deriva dal fatto che, per ogni x appartenente all'intervallo di definizione delle funzioni $\operatorname{arc} AT(x)$ e $\operatorname{arc}(A+T)(x)$, esistono due valori di tali funzioni compresi nell'intervallo di un periodo $(-m,2m)$, e situati simmetricamente rispetto a $\frac{m}{2}$. Per determinare univocamente le funzioni, si deve specificare se i loro valori cadono in $(-m,\frac{m}{2})$ [e in questo caso si deve prendere il segno + in (19) e (20)], oppure in $(\frac{m}{2},2m)$ [e in questo caso si deve prendere il segno -].

il che implica ovviamente le restrizioni $x \leq 2^{-2/3}$ per arcAT(x) e $0 \leq x \leq 2^{2/3}$ per arc(A+T)(x), come del resto è evidente dai diagrammi di Fig. 3.

Le formule (19) e (20) mostrano in modo indiscutibile che le FTG di ordine 3 sono strettamente legate a un tipo particolare di funzioni ellittiche (cioè quelle le cui inverse sono connesse agli integrali dei secondi membri di (19) e(20)). L'argomento verrà ripreso e trattato a fondo nella Parte II.

Per concludere questa rapida rassegna delle proprietà più interessanti delle FTG di ordine 3 nel campo reale, si possono citare alcune proprietà relative agli integrali delle FTG e agli sviluppi in serie.

La somiglianza di comportamento tra FTG e funzioni trigonometriche dà luogo a una notevole flessibilità nell'integrazione delle combinazioni di tali funzioni. Di fatto, sono stati trovati gli integrali di numerosissime tali combinazioni (tra cui quasi tutti i monomi, inclusi quelli con esponenti negativi)[16], sfruttando anche relazioni di ricorrenza,ecc. Tali tabelle di integrali possono essere utilizzate per l'integrazione(per sostituzione) di svariate altre funzioni,p.es. contenenti radici cubiche. Per il suo carattere essenzialmente applicativo, e per la sua pesantezza, la trattazione dettagliata di tale argomento è rimandata ad una pubblicazione a parte.

Riportiamo qui l'espressione esplicita dei primi termini degli sviluppi in serie (11)di A e T:

$$A(x) = x - \frac{x^4}{6} + \frac{2x^7}{63} - \frac{13x^{10}}{2268} + \frac{23x^{13}}{22113} - \frac{2803x^{16}}{14859936} + \frac{21733x^{19}}{635262264} - \dots$$

$$T(x) = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{18} - \frac{23x^9}{2268} + \frac{25x^{12}}{13608} - \frac{619x^{15}}{1857492} + \frac{8083x^{18}}{133739424} - \dots$$

---

16) Si può anticipare che i soli monomi non integrabili in termini delle FTG e delle trascendenti elementari sono quelli che si riducono a una funzione ellittica $\wp u$ di Weierstrass o comunque si ricollegano all'integrale $\int \wp u\, du$, che,come è noto, necessita l'introduzione di una nuova trascendente.

Come già detto, gli sviluppi di $S(x)$ e $1/T(x)$ si ottengono cambiando in segni + tutti i segni - delle precedenti formule.

Diamo pure uno sviluppo in serie per m, rapidamente convergente:

$$m = \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2^{2k}(6k+1)}$$

Come già detto, ulteriori dettagli su questi argomenti verranno forniti in una pubblicazione a parte.

PARTE II

LE FTG COME FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA.

II.1 Definizione e prime proprietà.

E' evidente che, per estendere le FTG nel piano complesso, la definizione data nel § I.1 non è più applicabile. Pur tuttavia, discendendo da tale definizione le importanti proprietà differenziali espresse dal sistema (4), tale sistema può essere ora usato per la definizione delle funzioni. Quindi si assumono come $A_n(x)$, $T_n(x)$ le soluzioni del sistema: [17)]

$$\begin{aligned} A_n' &= T_n^{\,n-1} \\ T_n' &= -A_n^{\,n-1} \end{aligned} \qquad (21)$$

con opportune condizioni al contorno, in modo tale da identificare (per quanto è possibile) sull'asse reale tali funzioni con quelle già incontrate nella Parte I.

---

17) Si suppone sempre che l'ordine n sia reale (anche se, in linea di principio, è possibile considerare il caso di n complesso).

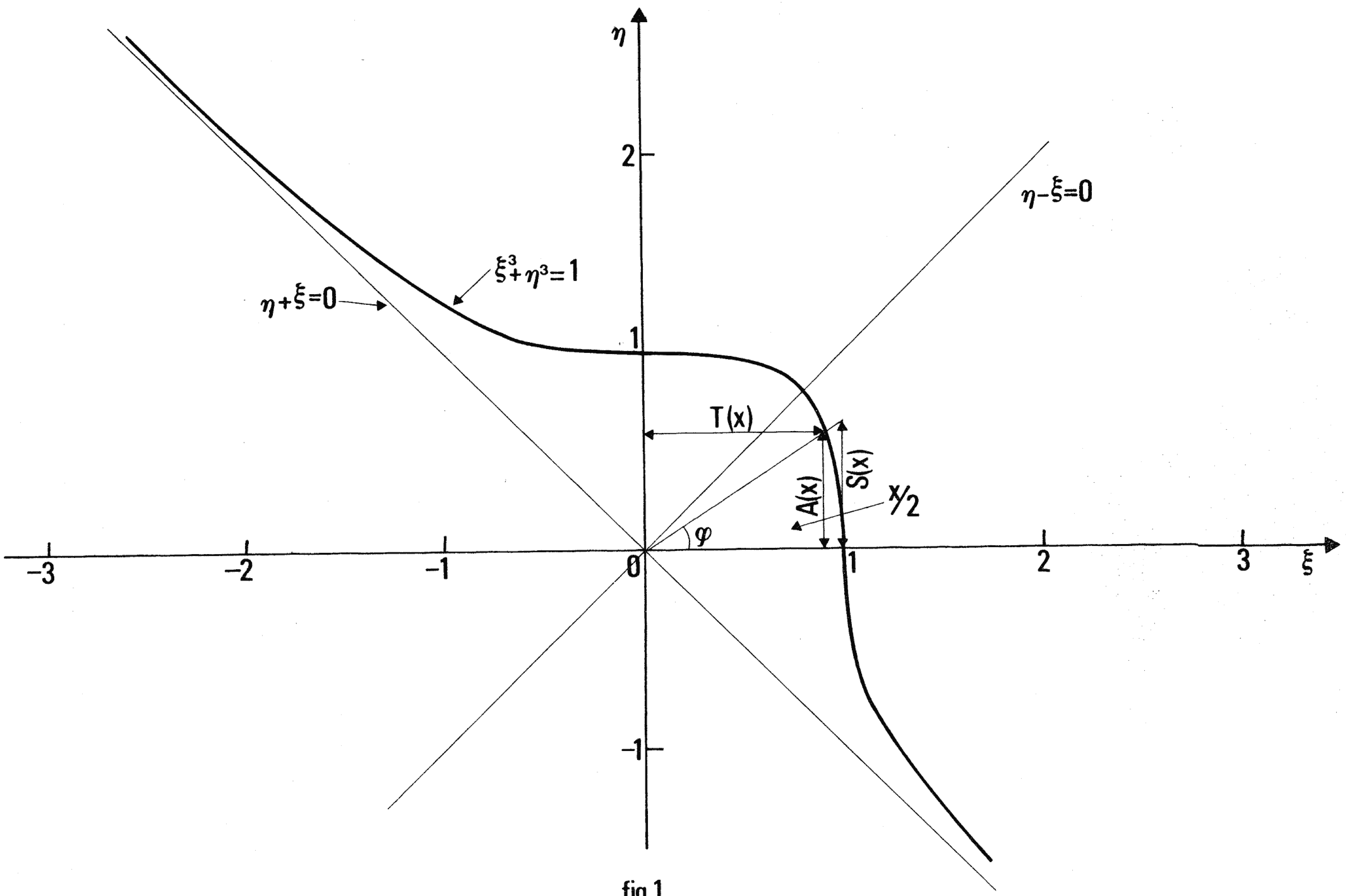

fig.1

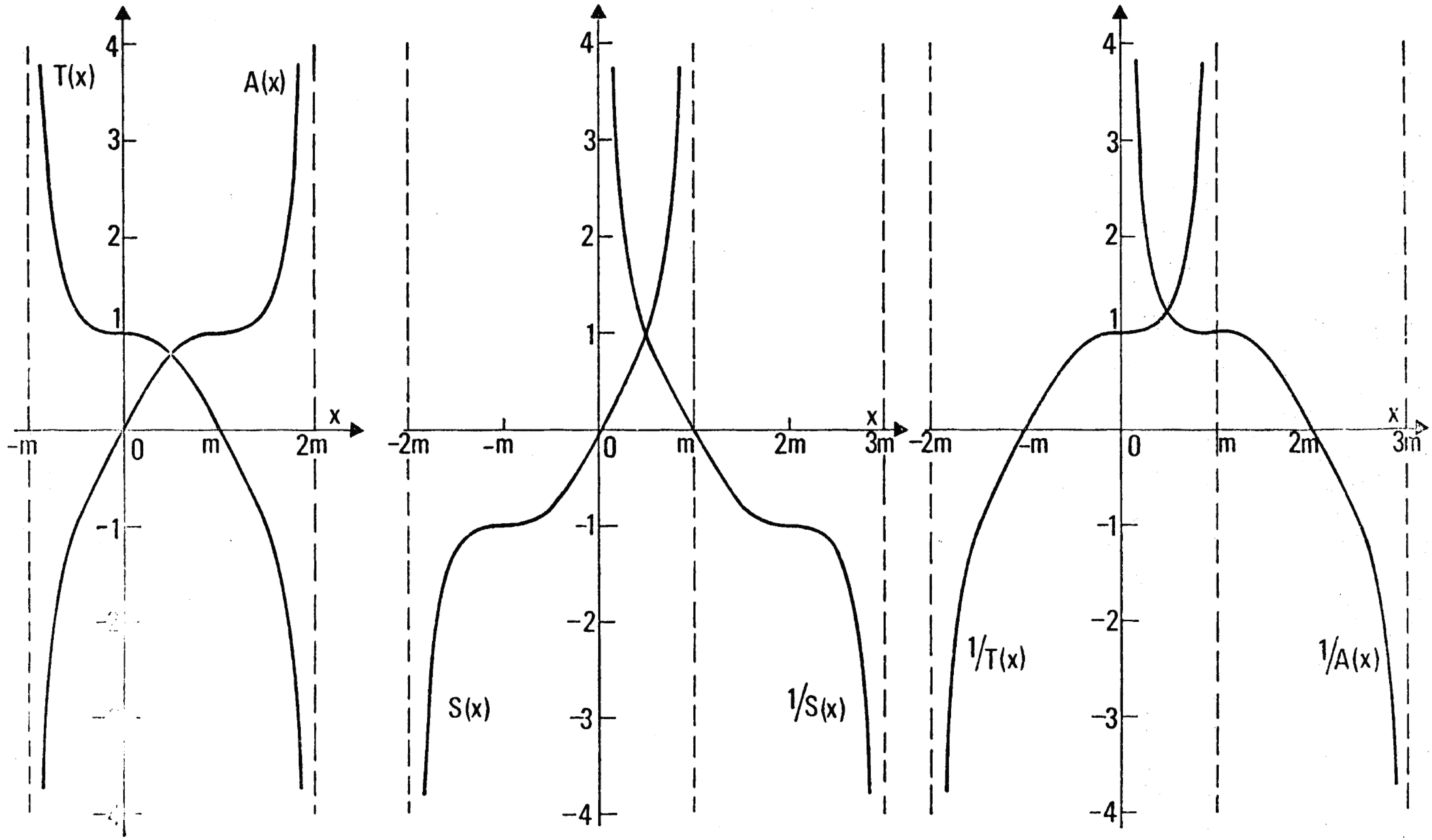

fig. 2

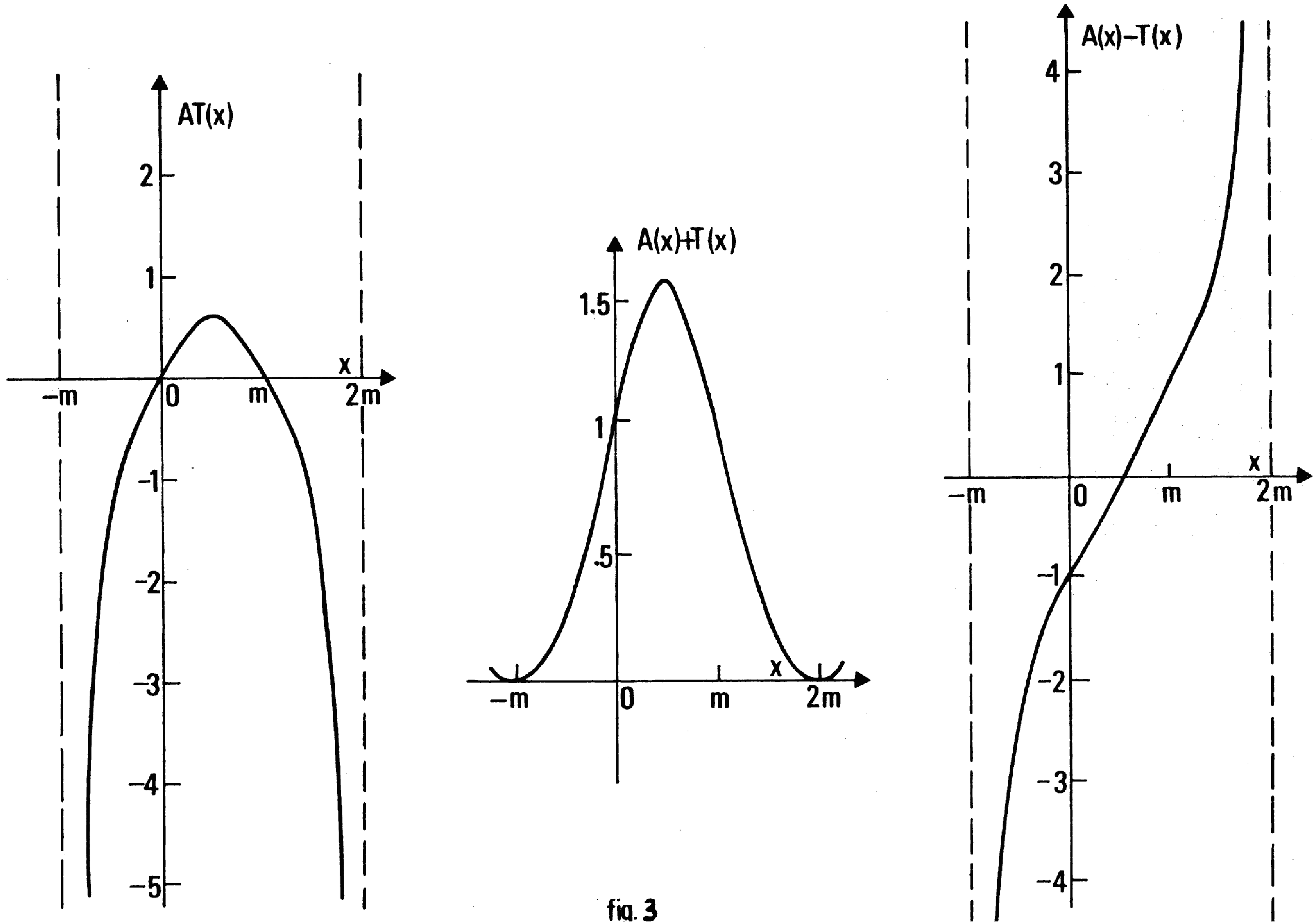

fig. 3