RIGIDITA' DI VARIETA' HERMITIANE COMPATTE (*)

Domenico PERRONE

Abstract.

In this paper using a "vanishing theorem" of Calabi and Vesentini [1], we obtain a condition in order that the complex analytic structure of a compact hermitian manifold be locally rigid.

Nozioni Preliminari.

Sia X una varietà complessa compatta kähleriana avente $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, con tensore metrico $g = (g_{\alpha\bar{\beta}})$.

Siano

$$\square = \bar{\partial}\,\theta + \theta\,\bar{\partial} \qquad \text{e} \qquad \bar{\square} = \partial\,\bar{\partial} + \bar{\theta}\,\partial$$

i laplaciani complessi operanti sulle (p,q) forme su X a valori complessi,

e $$\Delta = d\delta + \delta d = (\partial+\bar{\partial})(\theta+\bar{\theta}) + (\theta+\bar{\theta})(\partial+\bar{\partial})$$

il laplaciano reale.

Lichnerowicz [4], ha definito l'operatore laplaciano $\tilde{\Delta}$ sui p tensori T in questo modo:

$$(\tilde{\Delta}\, T)_{\alpha_1\cdots\alpha_p} = -\nabla^{\rho}\nabla_{\rho} T_{\alpha_1\cdots\alpha_p} + R_{\alpha_k\rho}\, T_{\alpha_1\cdots}{}^{\rho}{}_{\cdots\alpha_p} - R_{\alpha_k\rho\,\alpha_\ell\sigma}\, T_{\alpha_1\cdots}{}^{\rho}{}_{\cdots}{}^{\sigma}{}_{\cdots\alpha_p},$$

con ∇_{ρ} derivata covariante, $\nabla^{\rho} = g^{\rho\alpha}\nabla_{\alpha}$, $R_{\alpha_k\rho\,\alpha_\ell\sigma}$ componenti del tensore di curvatura e $R_{\alpha_k\ell}$ componenti del tensore di Ricci.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo GNSAGA DEL C.N.R.

$\tilde{\Delta}$ è la generalizzazione del laplaciano reale Δ di G. de Rham definito sui tensori antisimmetrici.

$\tilde{\Delta}$ conserva la simmetria o antisimmetria eventuale di T, commuta con la contrazione ed è autoaggiunto.

Essendo X dotata di una struttura kähleriana, allora si prova (cfr. [5]) che

$$\Delta = 2\square = 2\bar{\square} .$$

Su X si può quindi definire per i tensori T del tipo (p,o) l'operatore $\tilde{\square}$:

$$(\tilde{\square} T)_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} = -g^{\rho\bar{\tau}} \nabla_{\bar{\tau}} \nabla_{\rho} T_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} + R_{\alpha_k \bar{\tau}}\, g^{\bar{\tau}\rho} T_{\alpha_1 \cdots \rho \cdots \alpha_p} +$$

$$- R_{\alpha_k \bar{\tau}\, \alpha_\ell \bar{\nu}}\, g^{\bar{\tau}\rho} g^{\bar{\nu}\sigma} T_{\alpha_1 \cdots \rho \cdots \sigma \cdots \alpha_p} ,$$

$\tilde{\square}$ è la generalizzazione del laplaciano complesso $\bar{\square}$ definito sui tensori (p,o) antisimmetrici.

Con Θ denoteremo il fascio dei germi dei campi di vettori olomorfi tangenti a X, e con $H^q(X,\Theta)$ $(q = 1,\dots,n)$ i gruppi di coomologia con coefficienti in Θ (per maggiori dettagli si rinvia a [1] cap.2).

Sia M una varietà (connessa) e $\mathcal{V}$ un fibrato differenziabile su M con proiezione $\pi : \mathcal{V} \to M$ e tale che ogni fibra $V_t = \pi^{-1}(t)$ $(t \in M)$ di $\mathcal{V}$ sia una varietà analitica complessa n-dimensionale, la cui struttura complessa è compatibile con la struttura differenziabile di V_t indotta dalla struttura differenziabile di $\mathcal{V}$.

Lo spazio fibrato $\mathcal{V} = \{V_t / t \in M\}$ lo diremo <u>famiglia differenziabile di varietà complesse n-dimensionali</u>, se: per ogni punto $p \in \mathcal{V}$ esiste un intorno U di p e un omeomorfismo differenziabile h di U in $\mathbb{C}^n \times \pi(U)$ tale che per ogni $t \in \pi(U)$, $h_t = h|_{U \cap V_t}$ è una applicazione biolomorfa di $U \cap V_t$ in $\mathbb{C}^n \times \{t\}$.

Riferendoci a un punto base $o \in M$, la varietà complessa $V_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in M$, la diremo una deformazione di $V_o = \pi^{-1}(o)$.

Una famiglia differenziabile $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ di varietà complesse n-dimensionali la diremo banale, se per qualche punto $o \in M$ esiste una applicazione differenziabile di $\mathcal{V} \longrightarrow V_o = \pi^{-1}(o)$ che applica ogni fibra $V_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in M$, biolomorficamente in V_o; la diremo invece localmente banale in $o \in M$, se esiste un intorno N di o in M, tale che la famiglia $\pi^{-1}(N) \longrightarrow N$ è banale.

Rigidità di varietà hermitiane compatte.

Il seguente lemma è dovuto a Calabi e Vesentini (cfr. [1] pag. 487).

LEMMA . Sia X varietà kähleriana compatta di Einstein avente $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Siano $\lambda_1 \cdots \lambda_N$ $(N = \frac{1}{2} n(n+1)$ i valori propri in ogni punto di X della trasformazione lineare

$$Q : \xi_{\alpha\beta} \longrightarrow R^{\rho}{}_{\alpha\beta}{}^{\sigma} \, \xi_{\rho\sigma} \qquad (1)$$

operante sui tensori simmetrici di tipo $(2,0)$.

Supponiamo $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ e sia $\lambda = \inf\{\lambda_1(x) : x \in X\}$.
Se R denota la curvatura scalare costante, abbiamo $R \geq n(n+1)\lambda$ ed inoltre

(a) se $\lambda \geq 0$ e $R > 0$, allora $H^q(X, \Theta) = \{0\}$ per ogni $q > 0$;

(b) se $\lambda < 0 < R$ e $R + n\lambda > 0$, allora $H^q(X, \Theta) = \{0\}$ per ogni

$$q > - \frac{n\lambda}{R + n\lambda} ;$$

(c) se $R < 0$, allora $0 < \frac{R}{\lambda} \leq n(n+1)$ e $H^q(X, \Theta) = \{0\}$

per ogni $q < \dfrac{R}{n\lambda} - 1$.

<u>OSSERVAZIONE 1</u>. Il gruppo $H^q(X,\Theta)$ è legato con le deformazioni della struttura complessa di X. Infatti quando per una varietà complessa compatta X si ha $X^1(X,\Theta) = \{0\}$, allora per un criterio di Frölicher e Nijenhuis (cfr. [5], pag. 45) <u>la struttura complessa di X è localmente rigida</u>, cioé ogni famiglia $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ di varietà complesse n-dimensionali $V_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in M$, con fibra $V_0 = \pi^{-1}(0)$ analiticamente isomorfa a X, è localmente banale in 0.

Per varietà hermitiane compatte, proviamo il seguente teorema di rigidità.

<u>TEOREMA</u> . Sia X varietà kähleriana compatta di Einstein n-dimensionale, con curvatura scalare R, avente

$$\lambda > \frac{R}{2n} \quad \text{se} \quad R < 0, \qquad \lambda > -\frac{R}{2n} \quad \text{se} \quad R > 0 > \lambda.$$

Sia X' varietà complessa compatta hermitiana m-dimensionale tale che

(i) X' e X siano isospettrali per il laplaciano $\square_{(p,q)}$ con $(p,q) = (0,0),(1,0),(0,1),(0,2)$.

(ii) l'operatore Q' (operatore (1) riferito a X') ammetta come autosoluzione relativa a λ'_1 un tensore $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ il quale verifichi per ogni $x \in X'$ la condizione:

$$[(\tilde{\square}\,\eta)_{\alpha\beta}\,\bar{\eta}_{\alpha\beta}]_{Re} \geq \left(\frac{R}{n} + 2\lambda\right)\eta_{\alpha\beta}\bar{\eta}_{\alpha\beta} - [(g^{\rho\bar{\tau}}\nabla_{\bar{\tau}}\nabla_{\rho}\,\eta_{\alpha\beta})\bar{\eta}_{\alpha\beta}]_{Re}^{(1)} . \qquad (2)$$

In queste ipotesi si prova che X' è localmente rigida.

DIMOSTRAZIONE. Intanto dalle ipotesi fatte su λ, segue facilmente che, X ha struttura complessa localmente rigida.

---

(1) Se z è un numero complesso con $[z]_{Re}$ indicheremo la parte reale di z.

Infatti

se $\lambda > \frac{R}{2n}$ $(R < 0)$, dal punto (c) del lemma, abbiamo $H^1(X,\Theta) = \{0\}$;

se $\lambda > -\frac{R}{2n}$ $(R > 0 > \lambda)$, allora è anche $\lambda > -\frac{R}{n}$, quindi dal punto (b) del lemma abbiamo $H^1(X,\Theta) = \{0\}$.

Pertanto dall'osservazione 1 segue che X è localmente rigida.

La matrice hermitiana su X' sia data, in coordinate locali (z^α), da

$$ds^2 = 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha d\bar z^\beta \; ; \qquad \text{a } ds^2 \text{ possiamo associare}$$

sociare la (1,1) forma fondamentale $\omega = \sqrt{-1} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$.

Essendo la varietà hermitiana X' isospettrale a X per $\square_{(0,0)}$, $\square_{(1,0)}$ e $\square_{(0,1)}$, con X dotata di metrica kähleriana, dal corollario 4.3 di [3] (pag. 256) segue che la (1,1) forma ω è chiusa ossia X' è kähleriana. Quindi X e X' sono varietà compatte kähleriane aventi stesso spettro per $\square_{(0,0)}$, $\square_{(0,1)}$ e $\square_{(0,2)}$, con X di Einstein, pertanto applicando il corollario 4.3 di [2] (pag. 201) segue che anche X' è di Einstein con curvatura scalare R' uguale a quella di X. Naturalmente $m = \dim_{\mathbb{C}} X' = \dim_{\mathbb{C}} X = n$, in quanto X e X' avendo stesso spettro per $\square_{(0,0)}$ avranno stesso sviluppo asintotico.

Indicando con $R_{\alpha\bar\tau}$ e $R_{\alpha\bar\tau\beta\bar\nu}$ rispettivamente le componenti del tensore di Ricci e del tensore di curvatura di X', il tensore $\tilde\square n$ simmetrico di tipo (2,0) è dato da:

$$(\tilde\square n)_{\alpha\beta} = - g^{\rho\bar\tau} \nabla_{\bar\tau}\nabla_\rho n_{\alpha\beta} + R_{\alpha\bar\tau} g^{\bar\tau\rho} n_{\rho\beta} + R_{\beta\bar\tau} g^{\rho\bar\tau} n_{\alpha\rho}$$

$$- R_{\alpha\bar\tau\beta\bar\nu} g^{\bar\tau\rho} g^{\bar\nu\sigma} n_{\rho\sigma} - R_{\beta\bar\tau\alpha\bar\nu} g^{\bar\tau\rho} g^{\bar\nu\sigma} n_{\rho\sigma} \; .$$

Essendo X' varietà kähleriana di Einstein n-dimensionale con curvatura scalare R, il tensore di Ricci $R_{\alpha\bar\beta}$ verifica $R_{\alpha\bar\beta} = \frac{R}{2n} g_{\alpha\bar\beta}$, pertanto

$$(\tilde\Box \eta)_{\alpha\beta} = - g^{\rho\bar\tau}\nabla_{\bar\tau}\nabla_\rho \eta_{\alpha\beta} + \frac{R}{2n} g_{\alpha\bar\tau}\, g^{\bar\tau\rho}\eta_{\rho\beta} + \frac{R}{2n} g_{\beta\bar\tau} g^{\rho\bar\tau}\eta_{\alpha\rho} +$$

$$- 2R_\alpha{}^\rho{}_\beta{}^\sigma \eta_{\rho\sigma} = - g^{\rho\bar\tau}\nabla_{\bar\tau}\nabla_\rho \eta_{\alpha\beta} + \frac{R}{n}\eta_{\alpha\beta} + 2 R^\rho{}_{\alpha\beta}{}^\sigma \eta_{\rho\sigma} .$$

Dalla condizione (2), per ogni $x \in X'$, abbiamo:

$$\frac{R}{n}\eta_{\alpha\beta}\bar\eta_{\alpha\beta} - [(g^{\rho\bar\tau}\nabla_{\bar\tau}\nabla_\rho\eta_{\alpha\beta})\bar\eta_{\alpha\beta}]_{Re} + 2\lambda\, \eta_{\alpha\beta}\bar\eta_{\alpha\beta} \leq [(\tilde\Box\eta)_{\alpha\beta}\,\bar\eta_{\alpha\beta}]_{Re} =$$

$$= -[(g^{\rho\bar\tau}\nabla_{\bar\tau}\nabla_\rho\eta_{\alpha\beta})\bar\eta_{\alpha\beta}]_{Re} + \frac{R}{n}\eta_{\alpha\beta}\bar\eta_{\alpha\beta} + 2[(R^\rho{}_{\alpha\beta}{}^\sigma\eta_{\rho\sigma})\bar\eta_{\alpha\beta}]_{Re}$$

ossia

$$[(R^\rho{}_{\alpha\beta}{}^\sigma\eta_{\rho\sigma})\bar\eta_{\alpha\beta}]_{Re} \geq \lambda\, \eta_{\alpha\beta}\bar\eta_{\alpha\beta} . \tag{3}$$

D'altronde $R^\rho{}_{\alpha\beta}{}^\sigma\eta_{\rho\sigma} = Q'(\eta_{\alpha\beta}) = \lambda'_1\,\eta_{\alpha\beta}$ per ogni $x \in X'$, per cui la (3) diventa $\lambda'_1\eta_{\alpha\beta}\bar\eta_{\alpha\beta} \geq \lambda\,\eta_{\alpha\beta}\,\bar\eta_{\alpha\beta}$ per ogni $x \in X'$, ed essendo $\eta_{\alpha\beta}\,\bar\eta_{\alpha\beta} > 0$, ne segue che

$$\lambda' = \inf\{\lambda'_1(x) : x \in X'\} \geq \lambda .$$

Pertanto la condizione (2) geometricamente significa che lo spettro di Q' si trova dopo λ.

Essendo $\lambda' \geq \lambda$, abbiamo:

se $\lambda > \frac{R}{2n}$ $(R < 0)$, anche $\lambda' > \frac{R}{2n}$ e quindi dal punto (c) del lemma $H^1(X',\Theta') = \{0\}$ cioé X' è localmente rigida; se $\lambda > -\frac{R}{2n}(R>0>\lambda)$, può aversi $\lambda' \geq 0$ $(R > 0)$ oppure $\lambda' > -\frac{R}{2n}$ $(R > 0 > \lambda')$, quindi dal punto (a) oppure dal punto (b) del lemma segue che X' è localmente rigida.

C.V.D.

OSSERVAZIONE 2. In particolare se il tensore simmetrico $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ è a derivata covariante nulla, affinché si verifichi la condizione (2) del Teorema è sufficiente che η sia anche autosoluzione di $\tilde{\Box}$ con valore proprio $\mu \geq \left(\frac{R}{n} + 2\lambda\right)$.

B I B L I O G R A F I A

[1] E. Calabi-E.Vesentini — *On compact, locally symmetric kähler manifolds* - Ann. of Math.71,472-507(1960).

[2] H. Donnelly — *Minakshisundaram's coefficients on kähler manifolds* - Proc. of Symp.in Pure Math. 27,195-203 (1975).

[3] P. Gilkey — *Spectral geometry and the kähler condition for complex manifolds*. Inv. Math. 26, 231-258 (1974).

[4] A.Lichnerowicz — *Propagateurs et commutateurs* - Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sc.n°10 Paris 1961.

[5] J. Morrow - K. Kodaira — *Complex manifolds* - Holt-Rinehart and Winston New York 1971.

Approvato su proposta del
Prof. E. Vesentini (Scuola
Normale Superiore di Pisa)