$1_E \subseteq \mathcal{D} \cap (E \times E)$, inoltre, poiché $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$, $\mathcal{D} \cap (E \times E) \subseteq \mathcal{J} \cap (E \times E)$ quindi dalla ipotesi segue che $\mathcal{D} \cap (E \times E) = 1_E$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Sia a un elemento di S; poiché S è regolare esiste un elemento z di S tale che $a = aza$. Allora, poiché $az \mathcal{D} za$ ed az e za sono elementi idempotenti di S, per l'ipotesi $az = za$.

Siano x ed y due elementi di S inversi di un elemento a di S; poiché $ax \mathcal{D} ya$, $xa \mathcal{D} ay$, $ax \mathcal{D} xa$, per l'ipotesi $ax = ya, xa = ay, ax = xa$, pertanto

$$x = xax = axx = yax = yxa = yay = y.$$

Per l'arbitrarietà dell'elemento a si conclude che S è inverso e completamente regolare.

2. UNA CLASSIFICAZIONE DEGLI ORTOGRUPPI. -

In questo capitolo si caratterizzano tramite le relazioni di Green gli ortogruppi con banda degli idempotenti di tipo P, ove P è uno qualsiasi dei tipi di banda classificati da M. Petrich in /8/.

Risulta utile l'introduzione del concetto di congruenza Λ-destra [Λ-sinistra], come pure l'introduzione della banda S/ρ dove S è un ortogruppo e ρ è una congruenza Λ-destra [Λ-sinistra].

Di tutti i teoremi si sono omessi i "duali" che si ottengono scambiando $\mathcal{R}$ con $\mathcal{L}$, il termine "destra" con "sinistra" e in modo opportuno le uguaglianze presenti nella (iv) di ogni teorema.

Tutti i risultati di questo capitolo sono dovuti all'autore /12/.

Ricordiamo che se a è un elemento completamente regolare (c.r.) di un semigruppo S, si indica con $\hat{a}$ l'unità di H_a e con a^{-1} l'inverso di A in H_a.

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $axySxya = ayxSxaya$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda quasi normale destra, allora E è una banda seminormale destra e semiregolare sinistra; infatti

$$yxa = y(yx)a = ya(yx)a = yayxa$$
$$axy = axy(axy) = axy(ayxy) = axyayxy$$

per ogni $a,x,y \in E$. Allora per il Teorema 2.5 e il duale del Teorema 2.3, vale la ii).

ii) $\Longrightarrow$ iii) e iii) $\Longrightarrow$ iv) Immediate dal Teorema 2.5 e dal duale del Teorema 2.3.

iv) $\Longrightarrow$i) Per ogni $e,f,g \in E$

$$e\,f\,g = (efg)^3 = (efg)e(fge)fg \in efgSfgeS =$$
$$= egfSfegeS \subseteq egfS$$

analogamente $egf \in efgS$, pertanto $efgS = egfS$ (1).

Inoltre, per ogni $a,x,y \in E$

$$yxa = (yxa)^3 = yx(ayx)a(yxa) \in SayxSyxa =$$
$$= SaxySyaxa \subseteq Syaxa$$
$$yaxa = (yaxa)^2 = ya(xay)axa =$$
$$= ya(xyaxay)axa \quad \text{(per la (1) e il Teorema 1.1)}$$
$$= y(axy)axa(yaxa) \subseteq SaxySyaxa \subseteq SayxSyxa \subseteq Syxa.$$

Allora, per il Teorema 1.1 e per la (1)

$$yaxa = yaxa \cdot yxa = ya(xa)y(xa)a = y(xa)a = yxa.$$

TEOREMA 2.7.

Per un ortogruppo S con banda degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda normale;

ii) $\mathscr{R}^E, \mathscr{L}^E$ sono congruenze, $E/\mathscr{R}^E$ è una banda normale sinistra, $E/\mathscr{L}^E$ è una banda normale destra;

iii) $\mathscr{R}$ è una congruenza Λ-destra, $S/\mathscr{R}$ è una banda normale sinistra, $\mathscr{L}$ è una congruenza Λ-sinistra, $S/\mathscr{L}$ è una banda normale destra.

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $axySxya = ayxSyxa$.

<u>Dim.</u>-

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda normale, allora E è una banda quasi-normale sinistra e destra. Infatti

$$\begin{aligned} axay &= axayaxay = ((ax)ay(ax))ay = (axyax)ay = \\ &= ax(y(ax)ay) = ax(yaxy) = axy \\ yaxa &= yaxa\ yaxa = ya((xa)ya(xa)) = ya(xayxa) = \\ &= (ya(xa)y)xa = (yxay)xa = yxa \end{aligned}$$

per ogni a,x,y in E. Allora, per i Teoremi 2.5 e duale vale la ii).

ii) $\Longrightarrow$ iii) e iii) $\Longrightarrow$ iv) Immediate dal Teorema 2.5 e duale.

iv) $\Longrightarrow$ i) Per ogni $a,x,y \in E$

$$axy = (axy)^3 = (axy)a(xya)xy \in axySxyaS = ayxSyxaS \subseteq ayxS$$

analogamente $ayx \in axyS$, quindi $axyS = ayxS$;

inoltre, in modo analogo, anche $Sxya = Syxa$. Allora per il Teorema 1.1.

$$axya = (axy)a = (ayxaxy)a = a(yxaxya) = ayxa.$$

Si ricordi che una banda E è detta <u>regolare destra</u> [sinistra] sse $xa = axa$ [$ax = axa$]

<u>Teorema 2.8.</u>

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda regolare destra

ii) $\mathscr{R}^E = \mathscr{D}^E$

iii) $\mathscr{R} = \mathscr{D}$

iv) Per ogni $a,x \in S$: $xaS = axaS$

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) E' noto che $\mathscr{R}^E \subseteq \mathscr{D}^E$. Inoltre, se $a \mathscr{D}^E b$ (con a,b in E)

$$aba = a \quad , \quad bab = b.$$

Allora, $a = aba = ba$, $b = bab = b$; pertanto per il Teorema 1.1 $a \mathscr{R}^E b$

ii) $\Longrightarrow$ iii) E' noto che $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{D}$. Inoltre se $a \mathscr{D} b$ con $a,b \in S$ $\hat{a} \mathscr{D} \hat{b}$, allora per il Teorema 1.5 $\hat{a} \mathscr{D}^E \hat{b}$ e quindi $\hat{a} \mathscr{R}^E \hat{b}$. Per il Teorema 1.5 $\hat{a} \mathscr{R} \hat{b}$ e pertanto $a \mathscr{R} b$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) Per ogni $a,x \in S$

$$SxaS = Sxa\hat{a}S = S\hat{a}xaS = Sa^{-1}axaS \subseteq SaxaS$$

e quindi $SxaS = SaxaS$ e, dall'ipotesi, $xaS = axaS$.

iv) $\Longrightarrow$i) Per ogni $a,x \in E$, poiché per l'ipotesi $xa \mathscr{R} axa$, per il Teorema 1.1

$$xa = axaxa = axa$$

TEOREMA 2.9.

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda normale destra;

ii) $\mathscr{R}^E = \mathscr{D}^E$, $\mathscr{L}^E$ è una congruenza e $E/\mathscr{L}^E$ è una banda normale destra;

iii) $\mathscr{R} = \mathscr{D}$, $\mathscr{L}$ è una congruenza Λ-sinistra e $S/\mathscr{L}$ è una banda normale destra;

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $xa\,Sxya = axaSyxa$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda normale destra, allora E è una banda regolare destra e normale. Infatti

$$xa = x(aa) = xaa = axa$$
$$axya = a(xya) = a(yxa) = ayxa$$

per ogni $a,x,y \in E$. Allora, per il Teorema 2.8 e per il Teorema 2.7 vale la ii).

ii) $\Longrightarrow$iii), iii) $\Longrightarrow$iv) Immediate dal Teorema 2.8 e dal duale del Teorema 2.5.

iv) $\Longrightarrow$ i) Per ogni $a,x \in E$

$$xa = (xa)^2 = (xa)a(xaa) \in xaSxaa = axaSaxa \subseteq axaS$$

analogamente $axa \in xaS$, pertanto $xaS = axaS$ (1).

Per ogni $a,x,y \in E$, per la (1)

$$xyaS = x(ya)S = (ya)x(ya)S = y(a(xy)aS) = y(xy)aS =$$
$$= yx(ya)S = yxayaS \subseteq yxaS$$

analogamente $yxaS \subseteq xyaS$, pertanto $xyaS = yxaS$ (2).

Inoltre

$$xya = (xya)^2 = (xya)a(xya) \in xyaSxya = yxaS\,x\,ya \quad \text{(per la (2))} \subseteq$$
$$\subseteq SxaSxya = SaxaSyxa \subseteq Syxa$$

$$yxa = (yxa)^2 = (yxa)a\,(yxa) \in yaxaSyxa \quad \text{(per la (1))} \subseteq$$
$$\subseteq SaxaSyxa = SxaSxya \subseteq Sxya$$

cioé $Syxa = Sxya$. Allora, gli idempotenti xya ed yxa sono nella stessa $\mathscr{H}$-classe, pertanto $xya = yxa$.

TEOREMA 1.10. -

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è un semireticolo;

ii) $\mathscr{R}^E = \mathscr{L}^E = \mathscr{D}^E$

iii) $\mathscr{R} = \mathscr{L} = \mathscr{D}$

iv) Per ogni $a \in S$: $aS = Sa$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Immediata per la definizione delle relazioni di Green.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Siano $a,b \in S$

$$a\,\mathscr{R}\,b \iff \hat{a}\,\mathscr{R}\,\hat{b} \iff \hat{a}\,\mathscr{L}\,\hat{b} \iff a\mathscr{L}b$$

inoltre

$$a\mathscr{L}b \iff \hat{a}\,\mathscr{L}\,\hat{b} \iff \hat{a}\,\mathscr{D}\,\hat{b} \iff a\mathscr{D}b$$

iii) $\Longrightarrow$ iv) Siano $a,b \in S$ poiché $ab \mathscr{D} ba$, per l'ipotesi $\mathscr{D} = \mathscr{R}$ e per il Teorema 1.1

$$\begin{aligned} ba &= \widehat{ba}\, ba = \widehat{ab}\, \widehat{ba}\, ba = \\ &= ab\, (ab)^{-1}\, ba \in aS \end{aligned}$$

cioé $Sa \subseteq aS$; Analogamente $aS \subseteq Sa$.

iv) $\Longrightarrow$ i) Siano $e,f \in E$, $ef \mathscr{D} fe$ quindi esiste $x \in S$ tale che $efS = xS$, $Sx = Sfe$. Pertanto, per l'ipotesi $efS = xS = Sx = Sfe = feS$ $Sef = efS = feS = Sfe$.

Allora per il Teorema 1.1

$$ef = ef \cdot fe = fe.$$

3. STRUTTURA DELGI ORTOGRUPPI. -

Sia S un ortogruppo; risulterà dal Teorema 3.1 seguente, che S è un semireticolo Y di gruppi rettangolari $S_\alpha (\alpha \in Y)$ e quindi il prodotto di un elemento x di S_α e di un elemento y di S_β è in $S_{\alpha\beta}$ ($\alpha\beta$ prodotto di α e β in Y). Ma tale teorema non chiarisce il modo in cui elementi di differenti S_α si possono moltiplicare tra loro.

Riprendendo un teorema di struttura per i semigruppi completamente regolari di Lallement [/7/, 1967],M. Petrich ottiene [/10/, 1974] un teorema di struttura "fine" per gli ortogruppi, chiarendo il modo in cui si moltiplicano gli elementi dei differenti S_α, tramite sistemi di applicazioni soddisfacenti certe proprietà; tuttavia M. Petrich non dà un procedimento effettivo di costruzione di tali sistemi.

La dimostrazione del teorema di M. Petrich si avrà ora (ottenendo una semplificazione della trattazione) utilizzando un risultato di Clifford [/2/, 1972] sugli ortogruppi a "due componenti".