MARCO BURZIO DAVIDE CARLO DEMARIA

Istituto di Geometria. Università di Torino.

DUALITY THEOREMS FOR REGULAR HOMOTOPY OF FINITE DIRECTED GRAPHS. (*)

RIASSUNTO. - *Dati uno spazio topologico normale e numerabilmente paracompatto* S *ed un grafo finito ed orientato* G *si prova che tra gli insiemi* Q(S,G) *e* Q^*(S,G) *delle classi di o-omotopia e di* o^**-omotopia esiste una biiezione naturale. Nelle stesse condizioni, se* S' *è un sottospazio chiuso di* S *e* G' *un sottografo di* G*, esiste ancora una biiezione naturale tra gli insiemi* Q(S,S';G,G') *e* Q*(S,S';G,G') *delle classi di omotopia. Si mostra infine che in condizioni meno restrittive per lo spazio* S *le precedenti biiezioni possono non sussistere.*

INTRODUCTION

In the extension from the undirected graphs to the directed ones, we have two possible definitions of regular function. In fact, given a topological space S and a finite directed graph G, a function $f\colon S \to G$ is called *o-regular* (resp. *o^*-regular*) if for all $v,w \in G$ such that $v \neq w$ and $v \nrightarrow w$, it is $\overline{f^{-1}(v)} \cap f^{-1}(w) = \phi$ (resp. $f^{-1}(v) \cap \overline{f^{-1}(w)} = \phi$). Therefore we can deal with two different homotopies, the o-homotopy and the o*-homotopy. Hence we examine the problem

(*) Work performed under the auspices of the *Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR, GNSAGA)*, Italy.

of seeing if, under suitable conditions for the space S, the o-homotopy and the o*-homotopy get to coincide necessarily, i.e. if there exists a natural bijection between the sets of homotopy classes $Q(S,G)$ and $Q^*(S,G)$. As we observed in [2], by the Duality Principle the o-homotopy and o*-homotopy are interchanged by replacing the graph G by the dually directed graph G^*; thus we can identify the four sets $Q(S,G)$, $Q^*(S,G)$, $Q(S,G^*)$, $Q^*(S,G^*)$ at the same time.

Briefly we show how to solve the foregoing statements. In Part one , at first, we just consider functions and homotopies that are *completely regular*, i.e. without singularities; hence we examine the sets of complete o-homotopy classes $Q_c(S,G)$ and the ones of complete o*-homotopy classes $Q^*_c(S,G)$. Then we obtain some properties which characterize the regular and completely regular functions (§ 1) and we give the definition of *pattern,* by which we construct a relation from the set of completely o-regular functions to the one of completely o*-regular functions. Consequently, we have (§ 3) the Duality Theorem for complete homotopy classes (Theorem 9): *"There exists a natural bijection between the sets of complete homotopy classes* $Q_c(S,G)$ *and* $Q^*_c(S,G)$*".*

Now we recall the results obtained in [3] , Theorems 12, 12*, 16, 16*:

i) If the space S is normal (*), in every class of $Q(S,G)$ (resp. $Q^*(S,G)$) there exists a completely o-regular (resp. o*-regular) function.

ii) If $S\times I$ is normal, two completely o-regular (resp. completely o*-regular) functions, which are homotopic, are also completely homotopic.

Hence it follows (§ 4) that if S and $S\times I$ are normal spaces, there exists a natural bijection from $Q_c(S,G)$ to $Q(S,G)$ and from $Q^*_c(S,G)$ to $Q^*(S,G)$. From here and Theorem 9 the Duality Theorem follows. Now if we recall that a normal space S such that the product $S\times I$ is normal, is said a *countably paracompact normal*

(*) We distinguish between normal space and T_4-space, according to whether it is a T_2-space or not.

space (see [12], pp.168-169) we can enunciate the Duality Theorem (Theorem 11): *"If* S *is a countably paracompact normal space, then there exists a natural bijection from* Q(S,G) *to* $Q^*(S,G)$*"*.

In Part two we consider the same problem for couples of topological spaces *(S,S')* and of directed graphs *(G,G')*. That is not a trivial generalization of Part one, because new difficulties rise. In general, indeed, we cannot construct patterns of completely o-regular functions, then we must add the further condition that the completely regular functions are *balanced* in S' as regards S (§ 5), i.e. such that for all $x' \in S'$, for all $v \in G$, $x' \in \overline{f^{-1}(v)}$ implies that $x' \in \overline{f^{-1}(v) \cap S'}$. Thus we can repeat the construction of patterns (§ 6). A second difficulty rises in that the so constructed patterns are not in general balanced functions. Hence we must choose as subspace S' an *open subspace* (§ 7) and under this condition the duality for complete homotopy is solved. Unfortunately we cannot deduce the Duality Theorem since the Normalization Theorems proved in [3] for S and $S \times I$ normal spaces hold only if S' is a closed set. We eliminate this last difficulty (§ 8,9) by considering the *decreasingly filtrated set* of open subspaces including S' and the *inductive limit* of the functions balanced in any open neighbourhood of S'. Thus by proceeding as in Part one we obtain the Duality Theorem (Theorem 32): *"If* S *is a countably paracompact normal space and* S' *a closed subspace of* S*, then there exists a natural bijection from the set of o-homotopy classes* Q(S,S';G,G') *to the one of* o^**-homotopy classes* $Q^*(S,S';G,G')$ *"*.

In § 11 we generalize the Duality Theorem to the case of $(n+1)$-tuples of topological spaces and of $(n+1)$-tuples of graphs. In § 12 we obtain the Duality Theorem for *absolute and relative homotopy groups* and we prove that the natural bijections are isomorphisms. At last in § 13 we give some counterexamples and among these we remark 13.4 and 13.5 which show that under weaker conditions for the space S (quasi compact, T_0 but not T_1) the two Duality Theorems do not hold.

0) Background.

Graphs and their subsets. (See [2] § 1, [3] § 1).

Let G be a *finite directed graph*.
If v, w are two vertices of G, we use the symbol $v \to w$ (resp. $v \not\to w$) to denote that vw is (resp. is not) a directed edge of G. If $v \to w$, we call v a *predecessor* of w and w a *successor* of v.

The graph G^* with the same vertices of G and such that $(u \to v$ in $G) \Leftrightarrow (v \to u$ in $G^*)$, is called the *dually directed graph* as regards G. (If $G \equiv G^*$, i.e. if for all $v,w \in G$ we have $(v \to w) \Leftrightarrow (w \to v)$, the graph is called *undirected*).

Let X be a non-empty subset of G. A vertex of X is called a *head* (resp. a *tail*) of X in G, if it is a predecessor (resp. a successor) of all the other vertices of X. We denote by $H_G(X)$ (resp. $T_G(X)$) or, simply, by $H(X)$ (resp. $T(X)$) the set of the heads (resp. tails) of X in G. If $H(X) \neq \phi$ (resp. $T(X) \neq \phi$), X is called *headed* (resp. *tailed*); otherwise, X is called *non-headed* (resp. *non-tailed*) Finally, X is called *totally headed* (resp. *totally tailed*), if all the non-empty subsets of X are headed (resp. tailed). If X is a singleton, we agree to say that X is headed.

Regular and completely regular functions. (See [2] § 1, [3] § 2).

Let S be a *topological space*.
Given a function $f\colon S \to G$ from S to G, we denote by capital letter V the set of all the f-counterimages of $v \in G$, and if we want to emphasize the function f, we write $V^f = f^{-1}(v)$.

A function $f\colon S \to G$ is called *o-regular* (resp. *o*-regular*), if for all $v,w \in G$ such that $v \neq w$ and $v \not\to w$, it is $V \cap \overline{W} = \phi$ (resp $\overline{V} \cap W = \phi$).

Let $I = [0,1]$ be the unit interval in R^1. Two o-regular (resp. o*-regular) functions $f,g\colon S \to G$ are called *o-homotopic* (resp. *o*-homotopic*), if there exists an o-regular (resp. o*-regular) function $F\colon S \times I \to G$, such that $F(x,0) = f(x)$ and $F(x,1) = g(x)$, for all $x \in S$. The o-regular (resp. o*-regular) function F is called an *o-homotopy* (resp. *o*-homotopy*) between f and g. The o-homotopy (resp. o*-homotopy) is an equivalence relation and we denote by $Q(S,G)$ (resp. $Q^*(S,G)$) the set of o-homotopy (resp. o*-homotopy) classes. We note that $Q^*(S,G)$ coincides with $Q(S,G^*)$ and $Q^*(S,G^*)$ with $Q(S,G)$.

DUALITY PRINCIPLE. - *Every true proposition in which appear the concepts of headed set, tailed set, o-regularity, o*-regularity, o-homotopy, o*-homotopy,* Q(S,G), Q*(S,G), *remains true if the concepts of headed set and tailed set, o-regularity and o*-regularity, o-homotopy and o*-homotopy,* Q(S,G) *and* Q*(S,G), *are interchanged throught the statement of the proposition.*

Given an o-regular (resp. o*-regular) function $f: S \to G$, a n-tuple $X = \{v_1,\dots, v_n\}$, ($n \geqslant 2$) is called a *singularity* of f if:

i) X is non-headed (resp. non-tailed):

ii) $\overline{V_1^f} \cap \dots \cap \overline{V_n^f} \neq \phi$.

An o-regular (resp. o*-regular) function $f: S \to G$ from S to G is called *completely o-regular* (resp. *completely o*-regular*), or simply *c.o-regular* (resp. *c.o*-regular*), if there are no singularities of f. (If the graph G is undirected, then all the singularities are couples and the c.regular functions are called *strongly regular* functions).

Functions between pairs. (See [2] §5,[3] §2).

Let S' be a *subspace* of S and G' a *subgraph* of G.

A function $f: S,S' \to G,G'$ is called *o-regular* (resp. *o*-regular*) if both $f: S \to G$ and its restriction $f' = f/_{S'}: S' \to G'$ are o-regular (resp. o*-regular) functions.

Two o-regular (resp. o*-regular) functions $f,g: S,S' \to G,G'$ are called *o-homotopic* (resp. *o*-homotopic*), if there exists an o-regular (resp. o*-regular) homotopy $F: S\times I,\ S'\times I \to G,G'$, between f and g. The o-homotopy (resp. o*-homotopy) is an equivalence relation and we denote by $Q(S,S';G,G')$ (resp. $Q\ (S,S';G,G')$) the *set of o-homotopy* (resp. *o^*-homotopy*) *classes.* We note that $Q^*(S,S':G,G')$ coincides with $Q(S,S',G^*, G'^*)$ and $Q(S,S';G,G')$ with $Q^*(S,S':G^*,G'^*)$.

A function $f\colon S,S' \to G,G'$ is called *c.o-regular* (resp. *c.o^*-regular*) if both $f\colon S \to G$ and $f'\colon S' \to G'$ are c.o-regular (resp. c.o^*-regular) functions.

As before, the *Duality Principle* holds for functions between pairs.

Main results of [2], [3].

R_a: $X \subseteq G$ *is totally headed, iff it is totally tailed.* (See [3], Proposition 4).

If S is a *normal topological space* and S' is a *closed subspace* of S, we have:

R_b: (The first Normalization Theorem). *Let* $f\colon S \to G$ *(resp.* $f\colon S,S' \to G,G'$*) be an o-regular function. Then there exists a c.o-regular function, o-homotopic to* f. (See [3], Theorems 12, 15).

R_c: (Extension Theorem between pairs). *Let* $f\colon S,S' \to G,G'$ *be an o-regular function. Then there exist a closed neighbourhood* U *of* S' *and an o-regular function* $g\colon S,S' \to G,G'$, *which is o-homotopic to* f *and such that the function* $g\colon S,U \to G,G'$ *is o-regular, i.e.* $g(U) \subseteq G'$ *and the restriction* $\hat{g}\colon U \to G'$ *of* g *to* U *is o-regular.* (See [2], Theorem 20).

R_d: *In the construction of* R_c, *if there exist* n *vertices* $p_1,\dots,p_n \in G$ *and* m *vertices* $q_1,\dots,q_m \in G'$, *such that* $\overline{P_1^f} \cap \dots \cap \overline{P_n^f} \cap \overline{Q_1^{f'}} \cap \dots \cap \overline{Q_m^{f'}} = \phi$, *then also it follows* $\overline{P_1^g} \cap \dots \cap \overline{P_n^g} \cap \overline{Q_1^{\hat{g}}} \cap \dots \cap \overline{Q_m^{\hat{g}}} = \phi$. *Similarly, from* $\overline{P_1^f} \cap \dots \cap \overline{P_n^f} \cap X = \phi$ *it results* $\overline{P_1^g} \cap \dots \cap \overline{P_n^g} \cap U = \phi$. (See [2], Corollary 21).

Moreover, if $S\times I$ is *normal*, then it results:

R_e: (The first Normalization Theorem for homotopies). *Let* $f,g\colon S \to G$ *(resp.* $f,g\colon S,S' \to G,G'$*) be two o-homotopic c.o-regular functions. Then, between the functions* f *and* g, *there also exists an o-homotopy, which is a c.o-regular function.* (See [3], Theorem 16).

By Duality Principle, the results dual to the previous ones are also true.

1. ORTOGRUPPI. -

Un <u>ortogruppo</u> S è un semigruppo completamente regolare (c.r.) in cui l'insieme E degli idempotenti è un sottosemigruppo.

I semigruppi idempotenti (o bande) e i semigruppi inversi c.r. sono esempi di ortogruppi.

Si perviene a delle caratterizzazioni degli ortogruppi in termini di relazioni di Green ($\mathscr{D},\mathscr{I},\mathscr{L},\mathscr{R},\mathscr{H}$); inoltre, si studiano i legami tra le relazioni di Green su S, ortogruppo, e le relazioni di Green sulla banda E degli idempotenti di S e si perviene ancora ad altre caratterizzazioni.

Se a è un elemento c.r. di un semigruppo S, si indica con $\hat{a}$ l'idempotente della $\mathscr{H}$-classe di S contenente a e con a^{-1} l'inverso di a nella stessa $\mathscr{H}$-classe.

<u>TEOREMA 1.1.</u>-

Siano a,b elementi c.r. di un semigruppo S, allora

i) $a\mathscr{R}b$ sse $\hat{a}\,\hat{b} = \hat{b}$, $\hat{b}\,\hat{a} = \hat{a}$

ii) $a\mathscr{L}b$ sse $\hat{a}\,\hat{b} = \hat{a}$, $\hat{b}\,\hat{a} = \hat{b}$

<u>Dim</u>.-

Si prova la i). Si osservi, dapprima, che se s è un elemento c.r. di un semigruppo S, poiché $sS \subseteq \hat{s}\, s\, S \subseteq \hat{s}\, S$ ed $\hat{s}\, S = s\, s^{-1}\, S \subseteq s\, S$ si ha

$$s\, S = \hat{s}\, S \qquad (1)$$

Siano a,b elementi c.r. di un semigruppo S tali che $a\mathscr{R}b$; per la (1) $\hat{a}\mathscr{R}\hat{b}$, quindi esiste un elemento x di S tale che $\hat{a}x = \hat{b}$, pertanto $\hat{a}\,\hat{b} = \hat{a}(\hat{a}x) = \hat{a}x = \hat{b}$; in modo analogo $\hat{b}\,\hat{a} = \hat{a}$. Viceversa, poiché $\hat{a}\, S = \hat{b}\,\hat{a}\, S \subseteq \hat{b}\, S$ e $\hat{b}\, S = \hat{a}\,\hat{b}\, S \subseteq \hat{a}\, S$, per la (1) $a\mathscr{R}b$.

La ii) si dimostra in modo analogo alla i).

TEOREMA 1.2. -

Sia S un ortogruppo; per ogni a,b in S

$$a\mathscr{D}b \quad \text{sse} \quad \hat{a} = \hat{a}\,\hat{b}\,\hat{a} \quad , \quad \hat{b} = \hat{b}\,\hat{a}\,\hat{b} .$$

Dim.-

Siano a,b due elementi di S, ortogruppo, tali che $a\mathscr{D}b$, quindi $a\mathscr{L}x$, $x\mathscr{R}b$ per un certo $x \in S$. Allora (cfr. Teorema 1.1)

$$\hat{a}\mathscr{L}\hat{x} \quad , \quad \hat{x}\mathscr{R}\hat{b} \qquad (2)$$

Poiché $\mathscr{L}$ è una congruenza destra e $\mathscr{R}$ una congruenza sinistra,

$$\hat{a}\,\hat{b}\mathscr{L}\hat{x}\,\hat{b} \quad , \quad \hat{a}\,\hat{x}\,\mathscr{R}\,\hat{a}\,\hat{b} ;$$

per le (2) e per il Teorema 1.1

$$\hat{a}\,\hat{b}\mathscr{L}\hat{b} \quad , \quad \hat{a}\,\mathscr{R}\,\hat{a}\,\hat{b} \quad ,$$

pertanto, ancora per il Teorema 1.1

$$\hat{a} = \hat{a}\,\hat{b}\,\hat{a} \quad , \quad \hat{b} = \hat{b}\,\hat{a}\,\hat{b} .$$

Il viceversa è immediato; infatti per il Teorema 1.1 $\hat{a}\,\hat{b}\mathscr{L}b$ e $\hat{a}\,\hat{b}\mathscr{R}a$, quindi $a\mathscr{D}b$.

Il Teorema 1.2 può essere utilizzato per caratterizzare gli ortogruppi come sottoclasse dei semigruppi regolari e dei semigruppi completamente regolari.

TEOREMA 1.3.-

Sia S un semigruppo regolare ed E l'insieme degli idempotenti di S. Sono equivalenti:

i) S è un ortogruppo;

ii) Per ogni $e,f \in E$: $e \mathscr{J} f$ sse $e = efe$, $f = fef$;

iii) Per ogni $e,f \in E$: $e\mathscr{D}f$ sse $e = efe$, $f = fef$;

iv) Per ogni $a,x \in S$: $a = axa \Longrightarrow a = ax^2a^2$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Se S è un ortogruppo, la ii) è vera per il Teorema 1.2, poiché $\mathscr{D} = \mathscr{J}$.

ii) $\Longrightarrow$iii) E' noto che $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$ pertanto, per ogni $e,f \in E$ tali che $e\mathscr{D}f$, per l'ipotesi $e = efe$, $f = fef$.

Viceversa, se $e,f \in E$ tali che $e = efe$, $f = fef$, allora $f\mathscr{L}ef$, $ef\mathscr{R}e$, quindi $e\mathscr{D}f$.

iii) $\Longrightarrow$iv) Siano $a,x \in S$ tali che $a = axa$, poiché $ax\mathscr{D}xa$ ed ax,xa sono elementi idempotenti di S, per l'ipotesi

$$ax = ax(xa)ax$$

quindi $a = axa = (axxaax)a = ax^2a^2$.

iv) $\Longrightarrow$i) Sia a un elemento di S; poiché a è regolare esiste $x \in S$ tale che $a = axa$. Allora, per l'ipotesi, $a = ax^2a^2 \in aSa^2$, pertanto per il Teorema IV.1.6 di /9/ S è completamente regolare.

Siano e,f elementi idempotenti di S ed x inverso di ef in S, allora

$$fxe = f(xefx)e = (fxe)^2$$

$$ef(fxe)ef = efxef = ef\ .$$

Per l'ipotesi

$$ef = ef(fxe)^2(ef)^2 = efxef(ef) = (ef)^2$$

pertanto ef è un idempotente, quindi S è un ortogruppo.

COROLLARIO 1.4.-

Sia S un semigruppo completamente regolare sono equivalenti:

i) S è un ortogruppo;

ii) Per ogni $a,b \in S : a\mathscr{D}b$ sse $\hat{a} = \hat{a}\,\hat{b}\,\hat{a}$, $\hat{b} = \hat{b}\,\hat{a}\,\hat{b}$

iii) Per ogni $a,x \in S : a = a\,x\,a \Longrightarrow a = a\,x^2\,a^2$.

OSSSERVAZIONE. -

L'equivalenza tra i) eiii) è nota (cfr. /10/).

Sia B un sottosemigruppo di un semigruppo S; indichiamo con $\mathscr{H}^B, \mathscr{L}^B, \mathscr{R}^B, \mathscr{D}^B, \mathscr{I}^B$ le relazioni di Green $\mathscr{H}, \mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{I}$ relative al semigruppo B.

TEOREMA 1.5.-

Sia S un ortogruppo ed E il suo sottosemigruppo degli idempoteneti. Allora

i) $\mathscr{R} \cap (E\times E) = \mathscr{R}^E$

ii) $\mathscr{L} \cap (E\times E) = \mathscr{L}^E$

iii) $\mathscr{H} \cap (E\times E) = \mathscr{H}^E$

iv) $\mathscr{D} \cap (E\times E) = \mathscr{D}^E$

Dim.-

La dimostrazione è immediata dal Teorema 1.1 e dal Teorema 1.2, tenendo conto che E è un ortogruppo.

Le i),ii),iii) del Teorema 1.5 valgono per situazioni più generali [cfr. /5/; Prop. 4.5,p.50]. La iv) può venir utilizzata per caratterizzare gli ortogruppi come sottoclasse dei semigruppi ortodossi cioè dei semigruppi regolari nei quali l'insieme E degli idempotenti è un sottosemigruppo. Vale infatti, il seguente teorema [cfr. /5/; Prop. 3.3, p.204]:

TEOREMA 1.6. -

Un semigruppo ortodosso S con banda degli idempotenti E è completamente regolare sse $\mathscr{D} \cap (E\times E) = \mathscr{D}^E$.

Dim. -

La necessità della condizione è immediata. Infatti, un semigruppo ortodosso completamente regolare è un ortogruppo, quindi,per il Teorema 1.5 $\mathscr{D} \cap (E\times E) = \mathscr{D}^E$. Viceversa, sia a un elemento di S; poiché S è regolare esiste $a' \in S$ tale che

$$a = aa'a \qquad , \; a' = a'aa' \qquad (3)$$

Posto $aa' = e$, $a'a = f$, poiché $e,f \in E$ ed $\mathcal{L} \mathcal{D} f$, per l'ipotesi $e \, \mathcal{D}^E f$, allora per il Teorema 1.2

$$e = efe \qquad , \qquad f = fef \qquad (4)$$

Sia $\bar{a} = ea'f$

$$a\bar{a}a = a(ea'f)a = aa'a(ea'aa'aa'f)aa'a \qquad \text{(per la (3))} =$$
$$= a(a'aea'a)a'(aa'faa')a = a(fef)a'(efe)a =$$
$$= afa'ea \qquad \text{(per la 4))} =$$
$$= aa'ea = aa'a = a$$

inoltre,

$$a\bar{a} = a(ea'f) = (aa'a)e(a'aa')f \qquad \text{(per la (3))} =$$
$$= a(a'aea'a)a'f = a(fef)a'f =$$
$$= afa'f \qquad \text{(per la (4))} =$$
$$= aa'f = ef$$

$$\bar{a}a = (ea'f)a = e(a'aa')f(aa'a) \qquad \text{(per la (3))} =$$
$$= ea'(aa'faa')a = ea'(efe)a =$$
$$= ea'ea \qquad \text{(per la (4))} =$$
$$= ea'a = ef$$

Si è provato che ogni elemento a di S è completamente regolare, quindi S è completamente regolare.

COROLLARIO 1.7. -

Un semigruppo ortodosso S con banda degli idempotenti E è completamente regolare sse $\mathcal{J} \cap (E X E) = \mathcal{J}^E$.

Dim. -

Un semigruppo ortodosso completamente regolare è un ortogruppo, quindi poiché $\mathcal{D} = \mathcal{J}$, per il Teorema 1.5 $\mathcal{J} \cap (EXE) = \mathcal{J}^E$.

Viceversa, supposto $\mathcal{J} \cap (EXE) = \mathcal{J}^E$, poiché $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ e $\mathcal{D}^E = \mathcal{J}^E$

$$\mathscr{D}\cap(E\times E) \subseteq \mathscr{I}\cap(E\times E) = \mathscr{I}^E = \mathscr{D}^E.$$

Inoltre, è noto che $\mathscr{D}^E \subseteq \mathscr{D}\cap(E\times E)$, pertanto per il Teorema 1.6, S è completamente regolare.

Si osservi che in un semigruppo ortodosso, in generale $\mathscr{D}\neq\mathscr{I}$.

DEFINIZIONE 1.7. - Una banda E si dice regolare destra [risp. sinistra] sse $ef = fef$ [risp. $ef = efe$] per qualsiasi $e,f\in E$.

LEMMA 1.8. - [cfr. /8/, Teorema 8]

In una banda E, sono equivalenti

i) E è una banda regolare destra [risp. sinistra]

ii) $\mathscr{R} = \mathscr{D}$ [risp. $\mathscr{L} = \mathscr{D}$]

Dim. -

E' noto che $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{D}$. Siano a,b elementi di E tali che $a\mathscr{D}b$, allora per il Teorema 1.2 $a = aba$, $b = bab$, quindi, poichè E è una banda regolare destra

$$ab = (aba)b = (ba)b = b$$
$$ba = (bab)a = (ab)a = a$$

pertanto per il Teorema 1.1 $a\mathscr{R}b$.

Viceversa, per ogni a,b in E, poiché $ab\mathscr{D}ba$ e $\mathscr{D}$ è una congruenza, $aba\mathscr{D}ba$. Allora essendo $\mathscr{R}=\mathscr{D}$, $aba\mathscr{R}ba$, pertanto per il Teorema 1.1

$$ba = (aba)ba = aba$$

TEOREMA 1.9. -

Se S è un semigruppo ed E l'insieme degli idempotenti di S, sono equivalenti:

i) S è un ortogruppo con E banda regolare destra

ii) S è ortodosso e $\mathscr{I}\cap(E\times E) = \mathscr{R}^E$

iii) S è ortodosso e $\mathscr{D}\cap(E\times E) = \mathscr{R}^E$

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) L'ortogruppo S è ortodosso; inoltre, poiché $\mathscr{D}=\mathscr{I}$ e per il Teorema 1.5, $\mathscr{I}\cap(E\times E)=\mathscr{I}^E$. La banda E è regolare destra, quindi, per il Lemma 1.8 $\mathscr{I}^E=\mathscr{D}^E=\mathscr{R}^E$, pertanto $\mathscr{I}\cap(E\times E)=\mathscr{R}^E$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) E' noto che $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{I}$; dall'ipotesi segue

$$\mathscr{D}\cap(E\times E)\subseteq\mathscr{I}\cap(E\times E)=\mathscr{R}^E .$$

E' noto che $\mathscr{R}^E\subseteq\mathscr{D}^E$ ed è immediato verificare che $\mathscr{D}\cap(E\times E)=\mathscr{D}^E$, quindi $\mathscr{D}\cap(E\times E)=\mathscr{R}^E$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Poiché $\mathscr{D}^E\subseteq\mathscr{D}\cap(E\times E)$ e $\mathscr{R}^E\subseteq\mathscr{D}^E$, dalla ipotesi segue che $\mathscr{D}^E=\mathscr{R}^E$ cioè per il Lemma 1.8 E è una banda regolare destra. Inoltre, $\mathscr{D}\cap(E\times E)=\mathscr{R}^E=\mathscr{D}^E$ implica, per il Teorema 1.6, che S è un orto hruppo.

Sussiste, inoltre, il seguente teorema in cui l'equivalenza tra i) e iii) è nota [cfr. /5/, p. 94]

TEOREMA 1.10. -

Se S è un semigruppo ed E l'insieme degli idempotenti di S, sono equivalenti:

i) S è completamente regolare e inverso.

ii) S è regolare e $\mathscr{I}\cap(E\times E)=1_E$

iii) S è regolare e $\mathscr{D}\cap(E\times E)=1_E$

Dim.-

i) $\Longrightarrow$ ii) Ovviamente, un semigruppo S c.r. e inverso è regolare. Inoltre, poiché $\mathscr{D}=\mathscr{I}$ e per il Teorema 1.5 $\mathscr{I}\cap(E\times E)=\mathscr{I}^E$; ma è noto che l'insieme degli idempotenti di S è una banda commutativa (semireticolo), quindi $\mathscr{I}^E=1_E$, pertanto $\mathscr{I}\cap(E\times E)=1_E$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Sia S un semigruppo regolare; è immediato verificare che

$1_E \subseteq \mathscr{D} \cap (E \times E)$, inoltre, poiché $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$, $\mathscr{D} \cap (E \times E) \subseteq \mathscr{J} \cap (E \times E)$ quindi dalla ipotesi segue che $\mathscr{D} \cap (E \times E) = 1_E$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Sia a un elemento di S; poiché S è regolare esiste un elemento z di S tale che $a = aza$. Allora, poiché $az \mathscr{D} za$ ed az e za sono elementi idempotenti di S, per l'ipotesi $az = za$.

Siano x ed y due elementi di S inversi di un elemento a di S; poiché $ax \mathscr{D} ya$, $xa \mathscr{D} ay$, $ax \mathscr{D} xa$, per l'ipotesi $ax = ya, xa = ay, ax = xa$, pertanto

$$x = xax = axx = yax = yxa = yay = y.$$

Per l'arbitrarietà dell'elemento a si conclude che S è inverso e completamente regolare.

2. UNA CLASSIFICAZIONE DEGLI ORTOGRUPPI. -

In questo capitolo si caratterizzano tramite le relazioni di Green gli ortogruppi con banda degli idempotenti di tipo P, ove P è uno qualsiasi dei tipi di banda classificati da M. Petrich in /8/.

Risulta utile l'introduzione del concetto di congruenza Λ-destra [Λ-sinistra], come pure l'introduzione della banda S/ρ dove S è un ortogruppo e ρ è una congruenza Λ-destra [Λ-sinistra].

Di tutti i teoremi si sono omessi i "duali" che si ottengono scambiando $\mathscr{R}$ con $\mathscr{L}$, il termine "destra" con "sinistra" e in modo opportuno le uguaglianze presenti nella (iv) di ogni teorema.

Tutti i risultati di questo capitolo sono dovuti all'autore /12/.

Ricordiamo che se a è un elemento completamente regolare (c.r.) di un semigruppo S, si indica con $\hat{a}$ l'unità di H_a e con a^{-1} l'inverso di A in H_a.

<u>DEFINIZIONE 2.1</u> - Sia S un semigruppo c.r. e ρ una relazione di equivalenza su S; ρ è una <u>Λ-relazione</u> se

$$a \,\rho\, \hat{a} \qquad \forall a \in S$$

Le relazioni di Green su un semigruppo c.r. sono esempi di Λ-relazioni.

<u>DEFINIZIONE 2.2</u> - Sia S un semigruppo c.r. e ρ una Λ-relazione su S; ρ è una congruenza Λ-destra [Λ-sin.] se è una congruenza sinistra [destra] ed

$$a \,\rho\, b \Longrightarrow \hat{a}c \,\rho\, \hat{b}c \qquad \forall c \in S \qquad (a,b \in S)$$

$$\left[a \,\rho\, b \Longrightarrow c\hat{a} \,\rho\, c\hat{b} \qquad \forall c \in S \qquad (a,b \in S)\right]$$

Si osservi che una Λ-relazione ρ è una congruenza se e solo se ρ è una congruenza Λ-destra e Λ-sinistra.

Sia S un semigruppo c.r. e ρ una congruenza Λ-destra; si indica con $\underline{a}$ la ρ-classe di a $(a \in S)$ e con S/ρ l'insieme delle classi di equivalenza su cui è definito il seguente prodotto

$$\underline{a}\,\underline{b} = \underline{\hat{a}\, b}$$

per ogni coppia $(\underline{a},\underline{b})$ di ρ-classi di S.

Si osservi che se una Λ-relazione ρ è una congruenza, allora S/ρ è il semigruppo quoziente.

<u>TEOREMA 2.1.-</u>

Se S è un ortogruppo e ρ è una congruenza Λ-destra, allora S/ρ è una banda.

<u>Dim.-</u>

Per ogni $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in S/\rho$

$$(\underline{a},\underline{b})\,\underline{c} = (\underline{a\,\hat{b}})\,\underline{c} = \underline{\hat{a}\,\hat{b}\;\;c} = \underline{(\hat{a}\,\hat{b})c} = \underline{\hat{a}(\hat{b}c)} =$$
$$= \underline{a}\;\;\underline{\hat{b}c} = \underline{a}\,(\underline{b}\,\underline{c})$$

i.e. il prodotto è associativo.

Inoltre, $\underline{a}\,\underline{a} = \underline{\hat{a}\,a} = \underline{a}$ per ogni $\underline{a} \in S/\rho$, quindi S/ρ è una

Sia S un semigruppo c.r.. Se $\{\rho_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di congruenze -destre di S contenenti una relazione $\mathcal{K}$, allora

$$\rho = \bigcap_{i\in I} \rho_i$$

è una congruenza Λ-destra e contiene $\mathcal{K}$. Si indichi con $\mathcal{K}'$ l'intersezione di tutte le congruenze Λ-destre di S, tali che $\mathcal{K} \subseteq \sigma$

Si ricordi che una banda E è detta regolare sinistra [destra] sse $ax=axa$ [risp. $xa = axa$], per ogni $a,x \in E$.

TEOREMA 2.2.

In ogni ortogruppo S, $\mathcal{R}'$ è la più piccola delle congruenze Λ-destre ρ tali che S/ρ è una banda regolare sinistra.

Dim. -

Dal Teorema 2.1, $S/\mathcal{R}'$ è una banda; inoltre, per ogni $a,x \in S$, $\hat{a}\hat{x}S = \hat{a}\hat{x}\hat{a}S$, quindi $\hat{a}\hat{x}\mathcal{R}'\hat{a}\hat{x}\hat{a}$, pertanto $S/\mathcal{R}'$ è una banda regolare sinistra.

Sia ρ una congruenza Λ-destra ρ tale che S/ρ è una banda regolare sinistra ed a,b due elementi di S tali che $a\,\mathcal{R}\,b$. Allora $\underline{a}\,\mathcal{R}\,\underline{b}$ in S/ρ, pertanto, poiché S/ρ è una banda regolare sinistra, $\underline{a} = \underline{b}$, così $\mathcal{R} \subseteq \rho$, quindi $\mathcal{R}' \subseteq \rho$.

In ogni teorema che segue l'equivalenza di (i) e (ii) è stata provata da M. Petrich in /8/.

DEFINIZIONE 2.3. Una banda E è detta una banda semiregolare destra [risp. sinistra] sse $yxa = yxyayxa$ [risp. $axy=axyayxy$] per ogni $a,x,y \in E$. Una banda E è detta una banda regolare sse $axya = axaya$, per ogni $a,x,y \in E$.

TEOREMA 2.3.

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda semiregolare destra;

ii) $\mathscr{R}^E$ è una congruenza;

iii) $\mathscr{R}$ è una congruenza Λ-destra;

iv) Per ogni $a,x \in E$ ed $y \in S$: $axyS = axayS$.

<u>Dim.-</u>

i) $\Longrightarrow$ ii) Siano $e,f \in E$ tali che $e\mathscr{R}^E f$, cioé $ef = f$, $fe = e$ (cfr. Teorema 1.1). Allora per ogni $g \in E$

$$fg = efg = efegefg = egfg.$$

analogamente $eg = fgeg$. Allora, per il Teorema 1.1, $eg\mathscr{R}^E fg$; pertanto $\mathscr{R}^E$ è una congruenza.

ii)$\Longrightarrow$iii) Siano a,b due elementi di S tali che $a\mathscr{R}b$, allora $\hat{a}\mathscr{R}\hat{b}$. Per il Teorema 1.5, $\hat{a}\mathscr{R}^E\hat{b}$ e, per l'ipotesi, $\hat{a}\hat{c}\mathscr{R}^E\hat{b}\hat{c}$ per ogni $c \in S$; inoltre, $\hat{a}\hat{c}E = \hat{b}\hat{c}E$ implica $\hat{a}\hat{c}ES = \hat{b}\hat{c}ES$ e quindi $\hat{a}\hat{c}S = \hat{b}\hat{c}S$, essendo $ES = S$. Tenendo conto che $s\hat{c}S = scS$ per ogni $s \in S$, si ottiene che $\hat{a}cS = \hat{b}cS$ cioé $\hat{a}c\mathscr{R}\hat{b}c$.

iii) $\Longrightarrow$iv) Siano a,x elementi di E, allora $ax\mathscr{R}axa$ con ax ed axa idempotenti, pertanto dall'ipotesi, $axy\,\mathscr{R}\,axay$ per ogni $y \in S$.

iv) $\Longrightarrow$i) Siano a,x,y elementi di E; per l'ipotesi, $yxa\mathscr{R}yxya$, quindi per il Teorema 1.1

$$yxa = yxyayxa.$$

<u>TEOREMA 2.4.</u>

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda regolare

ii) $\mathscr{R}^E, \mathscr{L}^E$ sono congruenze

iii) $\mathscr{R}$ è una congruenza Λ-destra, $\mathscr{L}$ è una congruenza Λ-sinistra

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $axySxya = axaySxaya$.

<u>Dim.-</u>

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda regolare, allora E è una banda semiregolare destra e sinistra, infatti, per ogni $a,x,y \in E$

$$yxa = yxayxa = (yxay)xa = (yxyay)xa = yxyayxa$$

$$axy = axyaxy = ax(yaxy) = \qquad = ax(yayxy) = axyayxy.$$

Per il Teorema 2.3 e il suo duale $\mathscr{R}^E$ e $\mathscr{L}^E$ sono congruenze.

ii) $\Longrightarrow$ iii) e iii) $\Longrightarrow$ iv) Immediate dal Teorema 2.3 e duale.

iv) $\Longrightarrow$ i) Per ogni $a,x,y \in E$

$$axy = (axy)^3 = (axy)a(xya)xy \in axySxyaS =$$
$$= axaySxayaS \subseteq axayS$$

$$axay = (axay)^3 = (axay)a(xaya)xay \in axaySxayaS =$$
$$= axySxyaS \subseteq axyS$$

cioé $axyS = axayS$; analogamente $Sxya = Sxaya$. Pertanto per il Teorema 1.1

$$axaya = (axay)a = (axy \cdot axay)a = a(xya \cdot xaya) = axya.$$

DEFINIZIONE 2.4.- Una banda E è detta seminormale destra [sinistra] sse $yxa = yayxa$ [$axy = axyay$] per ogni $a,x,y \in E$; una banda E è detta normale sinistra [destra] sse $axy = ayx$ [risp. $yxa = xya$], per ogni $a,x,y \in E$.

TEOREMA 2.5.

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda seminormale destra;

ii) $\mathscr{R}^E$ è una congruenza e $E/\mathscr{R}^E$ è una banda normale sinistra

iii) $\mathscr{R}$ è una congruenza Λ-destra e $S/\mathscr{R}$ è una banda normale sinistra,

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $axyS = ayxS$.

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda seminormale destra, allora E è una banda semiregolare destra; infatti, poiché per ogni $a,x,y \in E$

$$yxa = (yx)^2a = yx(yxa) = yxyayxa$$

per il Teorema 2.3, $\mathcal{R}^E$ è una congruenza. Da questo,

$$axyE = axayE; \qquad ayxE = ayaxE$$

per ogni $a,x,y \in E$, pertanto

$(axay)ayax) = axayax = axa(ya)x = a(ya)x = ayax$

$(ayax)(axay) = ayaxay = aya(xa)y = a(xa)y = axay$

cioé $ayaxE = axayE$ (cfr. Teorema 1.1), quindi $axyE = ayxE$.

ii) $\Longrightarrow$iii) $\mathcal{R}^E$ è una congruenza, quindi per il Teorema 2.3 $\mathcal{R}$ è una congruenza Λ-destra. Inoltre, per ogni $\underline{a}, \underline{x}, \underline{y} \in S/\mathcal{R}$, poiché $E/\mathcal{R}^E$ è una banda normale sinistra e vale il Teorema 1.5

$$\underline{a}\ \underline{x}\ \underline{y} = \underline{\hat{a}}\ \underline{\hat{x}}\ \underline{\hat{y}} = \underline{\hat{a}\hat{y}\hat{x}} = \underline{\hat{a}\hat{y}\hat{x}} = \underline{a}\ \underline{y}\ \underline{x}$$

pertanto $S/\mathcal{R}$ è una banda normale sinistra.

iii)$\Longrightarrow$iv) Siano a,x,y elementi di E; poiché $S/\mathcal{R}$ è una banda normale sinistra

$$\underline{a}\ \underline{x}\ \underline{y} = \underline{a}\ \underline{y}\ \underline{x}$$

quindi $\underline{axy} = \underline{ayx}$, cioé $axyS = ayxS$.

iv) $\Longrightarrow$i) Per ogni $a,x,y \in E$ $yxaS = yaxS$, quindi esiste $z \in S$ tale che $yxa = yaxz$. Allora

$$yayxa = ya(yxa) = ya(yaxz) = yaxz.$$

<u>DEFINIZIONE 2.5.</u> Una banda E è detta <u>quasinormale</u> destra [sinistra] sse $yxa = yaxa$ [$axy = axay$], per ogni $ax,y \in E$. Una banda E è detta <u>normale</u> sse $axya = ayxa$ per ogni $a,x,y \in E$.

<u>TEOREMA 2.6.</u>

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda quasi normale destra;

ii) $\mathcal{L}^E, \mathcal{R}^E$ sono congruenze e $E/\mathcal{R}^E$ è una banda normale sinistra;

iii) $\mathcal{L}$ è una congruenza Λ-sinistra, $\mathcal{R}$ è una congruenza Λ-destra e $S/\mathcal{R}$ è una banda normale sinistra;

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $axySxya = ayxSxaya$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda quasi normale destra, allora E è una banda seminormale destra e semiregolare sinistra; infatti

$$yxa = y(yx)a = ya(yx)a = yayxa$$
$$axy = axy(axy) = axy(ayxy) = axyayxy$$

per ogni $a,x,y \in E$. Allora per il Teorema 2.5 e il duale del Teorema 2.3, vale la ii).

ii) $\Longrightarrow$ iii) e iii) $\Longrightarrow$ iv) Immediate dal Teorema 2.5 e dal duale del Teorema 2.3.

iv) $\Longrightarrow$ i) Per ogni $e,f,g \in E$

$$e\,f\,g = (efg)^3 = (efg)e(fge)fg \in efgSfgeS =$$
$$= egfSfegeS \subseteq egfS$$

analogamente $egf \in efgS$, pertanto $efgS = egfS$ (1).

Inoltre, per ogni $a,x,y \in E$

$$yxa = (yxa)^3 = yx(ayx)a(yxa) \in SayxSyxa =$$
$$= SaxySyaxa \subseteq Syaxa$$

$$yaxa = (yaxa)^2 = ya(xay)axa =$$
$$= ya(xyaxay)axa \quad \text{(per la (1) e il Teorema 1.1)}$$
$$= y(axy)axa(yaxa) \subseteq SaxySyaxa \subseteq SayxSyxa \subseteq Syxa.$$

Allora, per il Teorema 1.1 e per la (1)

$$yaxa = yaxa\cdot yxa = ya(xa)y(xa)a = y(xa)a = yxa.$$

TEOREMA 2.7.

Per un ortogruppo S con banda degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda normale;

ii) $\mathcal{R}^E, \mathcal{L}^E$ sono congruenze, $E/\mathcal{R}^E$ è una banda normale sinistra, $E/\mathcal{L}^E$ è una banda normale destra;

iii) $\mathcal{R}$ è una congruenza Λ-destra, $S/\mathcal{R}$ è una banda normale sinistra, $\mathcal{L}$ è una congruenza Λ-sinistra, $S/\mathcal{L}$ è una banda normale destra.

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $axySxya = ayxSyxa$.

Dim.-

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda normale, allora E è una banda quasi-normale sinistra e destra. Infatti

$$axay = axayaxay = ((ax)ay(ax))ay = (axyax)ay =$$
$$= ax(y(ax)ay) = ax(yaxy) = axy$$
$$yaxa = yaxa\,yaxa = ya((xa)ya(xa)) = ya(xayxa) =$$
$$= (ya(xa)y)xa = (yxay)xa = yxa$$

per ogni a,x,y in E. Allora, per i Teoremi 2.5 e duale vale la ii).

ii) $\Longrightarrow$ iii) e iii) $\Longrightarrow$ iv) Immediate dal Teorema 2.5 e duale.

iv) $\Longrightarrow$ i) Per ogni $a,x,y \in E$

$$axy = (axy)^3 = (axy)a(xya)xy \in axySxyaS = ayxSyxaS \subseteq ayxS$$

analogamente $ayx \in axyS$, quindi $axyS = ayxS$;

inoltre, in modo analogo, anche $Sxya = Syxa$. Allora per il Teorema 1.1.

$$axya = (axy)a = (ayxaxy)a = a(yxaxya) = ayxa.$$

Si ricordi che una banda E è detta regolare destra[sinistra] sse $xa = axa$[$ax = axa$]

Teorema 2.8.

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda regolare destra

ii) $\mathcal{R}^E = \mathcal{D}^E$

iii) $\mathcal{R} = \mathcal{D}$

iv). Per ogni $a,x \in S$: $xaS = axaS$

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) E' noto che $\mathscr{R}^E \subseteq \mathscr{D}^E$. Inoltre, se $a\,\mathscr{D}^E\,b$ (con a,b in E)

$$aba = a \quad , \quad bab = b.$$

Allora, $a = aba = ba$, $b = bab = b$; pertanto per il Teorema 1.1 $a\,\mathscr{R}^E\,b$

ii) $\Longrightarrow$ iii) E' noto che $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{D}$. Inoltre se $a\,\mathscr{D}\,b$ con $a,b \in S$ $\hat{a}\,\mathscr{D}\,\hat{b}$, allora per il Teorema 1.5 $\hat{a}\,\mathscr{D}^E\,\hat{b}$ e quindi $\hat{a}\,\mathscr{R}^E\,\hat{b}$. Per il Teorema 1.5 $\hat{a}\,\mathscr{R}\,\hat{b}$ e pertanto $a\,\mathscr{R}\,b$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) Per ogni $a,x \in S$

$$SxaS = Sxa\hat{a}S = S\hat{a}xaS = Sa^{-1}axaS \subseteq SaxaS$$

e quindi $SxaS = SaxaS$ e, dall'ipotesi, $xaS = axaS$.

iv) $\Longrightarrow$i) Per ogni $a,x \in E$, poiché per l'ipotesi $xa\,\mathscr{R}\,axa$, per il Teorema 1.1

$$xa = axaxa = axa$$

TEOREMA 2.9.

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è una banda normale destra;

ii) $\mathscr{R}^E = \mathscr{D}^E$, $\mathscr{L}^E$ è una congruenza e $E/\mathscr{L}^E$ è una banda normale destra;

iii) $\mathscr{R} = \mathscr{D}$, $\mathscr{L}$ è una congruenza Λ-sinistra e $S/\mathscr{L}$ è una banda normale destra;

iv) Per ogni $a,x,y \in E$: $xa\,Sxya = axaSyxa$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Se E è una banda normale destra, allora E è una banda regolare destra e normale. Infatti

$$xa = x(aa) = xaa = axa$$
$$axya = a(xya) = a(yxa) = ayxa$$

per ogni $a,x,y \in E$. Allora, per il Teorema 2.8 e per il Teorema 2.7 vale la ii).

ii) $\Longrightarrow$iii), iii) $\Longrightarrow$iv) Immediate dal Teorema 2.8 e dal duale del Teorema 2.5.

iv) $\Longrightarrow$ i) Per ogni $a,x \in E$

$xa = (xa)^2 = (xa)a(xaa) \in xaSxaa = axaSaxa \subseteq axaS$

analogamente $axa \in xaS$, pertanto $xaS = axaS$ (1).

Per ogni $a,x,y \in E$, per la (1)

$xyaS = x(ya)S = (ya)x(ya)S = y(a(xy)aS) = y(xy)aS =$

$= yx(ya)S = yxayaS \subseteq yxaS$

analogamente $yxaS \subseteq xyaS$, pertanto $xyaS = yxaS$ (2).

Inoltre

$xya = (xya)^2 = (xya)a(xya) \in xyaSxya = yxaS\ x\ ya$ (per la (2)) $\subseteq$

$\subseteq SxaSxya = SaxaSyxa \subseteq Syxa$

$yxa = (yxa)^2 = (yxa)a\ (yxa) \in yaxaSyxa$ (per la (1)) $\subseteq$

$\subseteq SaxaSyxa = SxaSxya \subseteq Sxya$

cioé $Syxa = Sxya$. Allora, gli idempotenti xya ed yxa sono nella stessa $\mathcal{H}$-classe, pertanto $xya = yxa$.

TEOREMA 1.10. -

Per un ortogruppo S con insieme degli idempotenti E, sono equivalenti:

i) E è un semireticolo;

ii) $\mathcal{R}^E = \mathcal{L}^E = \mathcal{D}^E$

iii) $\mathcal{R} = \mathcal{L} = \mathcal{D}$

iv) Per ogni $a \in S$: $aS = Sa$.

Dim. -

i) $\Longrightarrow$ ii) Immediata per la definizione delle relazioni di Green.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Siano $a,b \in S$

$a\,\mathcal{R}\,b \Longleftrightarrow \hat{a}\,\mathcal{R}\,\hat{b} \Longleftrightarrow \hat{a}\,\mathcal{L}\,\hat{b} \Longleftrightarrow a\mathcal{L}b$

inoltre

$a\mathcal{L}b \Longleftrightarrow \hat{a}\,\mathcal{L}\,\hat{b} \Longleftrightarrow \hat{a}\,\mathcal{D}\,\hat{b} \Longleftrightarrow a\mathcal{D}b$

iii) $\Longrightarrow$ iv) Siano $a,b \in S$ poiché $ab\,\mathscr{D}\,ba$, per l'ipotesi $\mathscr{D}=\mathscr{R}$ e per il Teorema 1.1

$$ba = \widehat{ba}\ ba = \widehat{ab}\ \widehat{ba}\ ba = $$
$$= ab\ (ab)^{-1}\ ba \in aS$$

cioé $Sa \subseteq aS$; Analogamente $aS \subseteq Sa$.

iv) $\Longrightarrow$ i) Siano $e,f \in E$, $ef\,\mathscr{D}\,fe$ quindi esiste $x \in S$ tale che $efS = xS$, $Sx = Sfe$. Pertanto, per l'ipotesi $efS = xS = Sx = Sfe = feS$ $Sef = efS = feS = Sfe$.

Allora per il Teorema 1.1

$$ef = ef \cdot fe = fe.$$

3. STRUTTURA DELGI ORTOGRUPPI. -

Sia S un ortogruppo; risulterà dal Teorema 3.1 seguente, che S è un semireticolo Y di gruppi rettangolari $S_\alpha (\alpha \in Y)$ e quindi il prodotto di un elemento x di S_α e di un elemento y di S_β è in $S_{\alpha\beta}$ ($\alpha\beta$ prodotto di α e β in Y). Ma tale teorema non chiarisce il modo in cui elementi di differenti S_α si possono moltiplicare tra loro.

Riprendendo un teorema di struttura per i semigruppi completamente regolari di Lallement [/7/, 1967],M. Petrich ottiene[/10/, 1974] un teorema di struttura "fine" per gli ortogruppi, chiarendo il modo in cui si moltiplicano gli elementi dei differenti S_α , tramite sistemi di applicazioni soddisfacenti certe proprietà; tuttavia M. Petrich non dà un procedimento effettivo di costruzione di tali sistemi.

La dimostrazione del teorema di M. Petrich si avrà ora (ottenendo una semplificazione della trattazione) utilizzando un risultato di Clifford [/2/, 1972] sugli ortogruppi a "due componenti".

Si vuole affrontare lo studio della struttura degli ortogruppi mediante una particolare decomposizione.

Sia S un semigruppo, Y un semireticolo e Z un omomorfismo da S in Y; allora ognuno dei sottoinsiemi αZ^{-1} ($\alpha \in Z$) è un sottosemigruppo di S. Denotato αZ^{-1} con S_α, S è unione disgiunta dei sottosemigruppi $S_\alpha(\alpha \in Y)$ ed è tale che

$$S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$$

dove $\alpha\beta$ è il prodotto di α e β in Y.

Se ogni S_α con $\alpha \in Y$ è di "tipo A" allora si dice che S è un <u>semireticolo di semigruppi di "tipo A"</u>.

<u>TEOREMA 3.1</u>. - [Yamada M., Petrich,M., Preston G.B.]

Un semigruppo S è un ortogruppo sse è un semireticolo di gruppo rettangolare.

<u>Dim.</u> -

Sia S un ortogruppo; per il Teorema 4.5 di /4/, S è un semireticolo Y di semigruppi completamente semplici $S_\alpha(\alpha \in Y)$. Poiché l'insieme E degli idempotenti di S è un sottosemigruppo di S, l'insieme $E_\alpha(\alpha \in Y)$ degli idempotenti di S è un sottosemigruppo di S_α, pertanto S_α è un gruppo rettangolare.

Viceversa, sia S un semireticolo Y di gruppi rettangolari $S_\alpha(\alpha \in Y)$; è chiaro che S è unione di gruppi, rimane da provare che il prodotto di due idempotenti è un idempotente. Siano e,f idempotenti di S, $e \in S_\alpha$, $f \in S_\beta$ per certi $\alpha,\beta \in Y$; allora posto a = ef, b = fe, entrambi sono in $S_{\alpha\beta}$ ed

$$b^2 = fefe = fe(ef)fe = bab.$$

Usando il prodotto su un gruppo rettangolare, $b^2 = bab$ implica che a = ef è idempotente.

Può sembrare che il Teorema 3.1 non costituisca un progresso nello studio della struttura degli ortogruppi, in quanto i gruppi rettagolari, anche se di struttura nota, sono più complicati dei gruppi. Ma un reale progresso esiste ed è nella relazione $S_\alpha B_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$. Infatti, era già noto che

$$S = \bigcup_{e\in E} H_e$$

dove E è l'insieme degli idempotenti di S e ogni sottogruppo H_e è la $\mathcal{H}$-classe contenente e, ma non si aveva idea di dove fossero i prodotti di elementi $x \in H_e$ ed $y \in H_f$ o se il prodotto di H_e ed H_f fossero contenuto in un singolo H_g.

Tuttavia, anche considerando la struttura dei semireticoli come nota, non è ancora chiara la struttura "fine" di S, poiché sebbene sia $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$, il modo in cui elementi di differenti S_α possono moltiplicarsi è estremamente complicato. Si darà in questo capitolo un risultato dovuto a Petrich che migliora il Teorema 3.1.

DEFINIZIONE 3. 1. -

Sia S un semigruppo, T un sottosemigruppo di S ed a un elemento di S tale che $aT \subseteq T$. Si definisce T-traslazione interna sinistra di a, l'applicazione λ_a da T in T tale che

$$\lambda_a x = ax$$

per ogni $x \in T$.

DEFINIZIONE 3.2. -

Sia S un semigruppo, T un sottosemigruppo di S ed a un elemento di S tale che $Ta \subseteq T$. Si definisce T-traslazione interna destra di a, l'applicazione ρ_a da T in T tale che

$$x\rho_a = xa$$

ogni $x \in T$.

LEMMA 3.2.-

Sia S un semigruppo, T un sottosemigruppo di S ed a, a' due elementi di S tali che $a\,T \subseteq T$, $a'\,T \subseteq T$, $T\,a \subseteq T$, $T\,a' \subseteq T$.

Allora

i) λ_a, ρ_a sono associate

ii) $\lambda_{aa'} = \lambda_a \lambda_{a'}$, $\rho_{aa'} = \rho_a \rho_{a'}$

Dim. -

Si prova la i). Per ogni x, y in T

$$x(\lambda_a y) = x(ay) = xay = (x\rho_a)y$$

Si prova la ii). Per ogni $x \in S$

$$\lambda_{aa'} x = aa'x = a(a'x) = \lambda_a(\lambda_{a'} x)$$

$$x\rho_{aa'} = xaa' = (xa)a' = (x\rho_a)\rho_{a'}$$

Sia X un insieme, il semigruppo di tutte le trasformazioni di X riguardate come destre |risp. sinistre| si denota con $\widetilde{\mathcal{T}}(X)$ |risp. $\mathcal{T}(X)$|.

Indichiamo inoltre con π il semireticolo costituito da due soli elementi α, β tali che $\alpha > \beta$ cioé $\alpha\beta = \beta\alpha = \beta$ ed $\alpha \neq \beta$.

DEFINIZIONE 3.3. - Un semigruppo S è un ortogruppo a due componenti sse è un semireticolo π di gruppi rettangolari.

La struttura di un ortogruppo a due componenti è descritta dal seguente lemma.

LEMMA 3.3. -

Siano $S_\alpha = G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ ed $S_\beta = G_\beta \times I_\beta \times \Lambda_\beta$ gruppi rettangolari disgiunti. Si consideri

(A.1) un omomorfismo $t_{\alpha,\beta}$ da S_α in $\widetilde{\mathcal{T}}(I_\beta)$

(A.2) un omomorfismo $\tau_{\alpha,\beta}$ da S_α in $\mathcal{T}(\Lambda_\beta)$

(A.3) un omomorfismo $Z_{\alpha,\beta}$ da G_α in G_β

Se $A = (a;j,\mu) \in S_\alpha$ ed $B = (b;i,\lambda) \in S_\beta$, si definiscono i prodotti

(1) $AB = (aZ_{\alpha,\beta})b;\ (t^{A}_{\alpha,\beta})i,\lambda)$

(2) $BA = (b(aZ_{\alpha,\beta});\ i,\mu(A\tau_{\alpha,\beta}))$.

Con il prodotto definito e mantenendo i prodotti in S_α e S_β, $S_\beta \cup S_\alpha$ è un ortogruppo a due componenti.

Viceversa, ogni ortogruppo a due componenti è isomorfo ad una tale costruzione.

Dim.-

Siano $S_\alpha = G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ e $S_\beta = G_\beta \times I_\beta \times \Lambda_\beta$ due gruppi rettangolari disgiunti, e siano $t_{\alpha,\beta}$, $\tau_{\alpha,\beta}$ e $Z_{\alpha,\beta}$ le applicazioni delle ipotesi del teorema. Il prodotto definito su $S = S_\alpha \cup S_\beta$, come nel teorema, è associativo.

L'associatività si ottiene dalla verifica delle uguaglianze

$(AB)C = A(BC)$, $A(CB) = (AC)B$, $(BA)C = B(AC)$

per ogni $A,C \in S_\alpha$ e $B \in S_\beta$ e, per ogni $A \in S_\alpha$ e $C,B \in S_\beta$.

Verifichiamo, ora che $(AC)\ B = A(CB)$ con $A,C \in S_\alpha$ ed $B \in S_\beta$.

Sia $A = (a;i,\delta)$, $C = (c;j,\varepsilon)$, $B = (b,i,\mu)$:

$(AC)B = (\ (ac\ Z_{\alpha\beta})b\ ;\ (t^{(AC)}_{\alpha,\beta})i,\mu)$ (per la (1));

$A(CB) = A((c\ Z_{\alpha,\beta})b\ ;\ (t^{C}_{\alpha,\beta})i,\mu)$ (per la (1)) =

$= (\ (a\ Z_{\alpha,\beta})(c\ Z_{\alpha,\beta})b;\ t^{A}_{\alpha,\beta}(\ (t^{C}_{\alpha,\beta})i,\mu)$ (per la (1)) =

$= (\ (ac\ Z_{\alpha,\beta})b;\ (t^{AC}_{\alpha,\beta})i,\mu)$

poiché $Z_{\alpha,\beta}$ e $t_{\alpha,\beta}$ sono omomorfismi.

Le altre uguaglianze si dimostrano in modo analogo.

Per come è definito il prodotto in S è evidente che S_α e S_β

sono sottosemigruppi di S, inoltre $S = S_\alpha \cup S_\beta$, pertanto S è completamente regolare. Per provare che S è un ortogruppo, poiché S_α e S_β sono gruppi rettangolari e quindi ortogruppi, è sufficiente provare che i prodotti AB e BA sono idempotenti, se A è un idempotente di S_α e B è un idempotente di S_β

Sia A un idempotente di S_α , sia B un idempotente di S_β:

$$A = (e_\alpha;i,\lambda) \qquad \text{con} \quad e_\alpha \text{ unità di } G_\alpha$$

$$B = (e_\beta;j,\mu) \qquad \text{con} \quad e_\beta \text{ unità di } G_\beta$$

$$AB = ((e_\alpha Z_{\alpha,\beta})e_\beta \; ; (t^A_{\alpha,\beta})j,\mu) = (e_\beta; (t^A_{\alpha,\beta})j,\mu)$$

$$BA = (e_\beta(e_\alpha Z_{\alpha,\beta}); j ,\lambda(B\tau_{\alpha,\beta})) = e_\beta;j,\lambda(B\tau_{\alpha,\beta}) .$$

Pertanto, poiché AB e BA sono idempotenti, S è un ortogruppo.

Viceversa, sia $S = S_\alpha \cup S_\beta$ ($\alpha > \beta$) un ortogruppo a due componenti; si indica ancora con S il semigruppo isomorfo al precedente con S_α della forma $G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ e S_β della forma $G_\beta \times I_\beta \times \Lambda_\beta$.

Si procede ora alla costruzione delle applicazioni $t_{\alpha,\beta}$, $\tau_{\alpha,\beta}$, $Z_{\alpha,\beta}$.
Sia $A \in S_\alpha$, si consideri le S_β-traslazioni interne sinistra e destra di A, λ_A e ρ_A, rispettivamente. Si osservi che

$$\lambda_A(b;i,\mu) = \lambda_A((b;i,\mu)\ (1;i,\mu) =$$

$$= (\lambda_A(b;i,\mu))\ (1;i,\mu) = (c;k,\mu)$$

(con $c \in G_\beta$, $k \in I_\beta$, opportuni), con $b \in G_\beta$, $i \in I_\beta$ e $\mu \in \Lambda_\beta$ ed 1 l'unità di G_β. In altre parole λ_A non cambia l'indice appartenente a I_β .

Si suppone che

$$\lambda_A(1;i,\mu) = (b;j,\mu) \quad \text{e} \quad \lambda_A(1;i,\partial) = (c;k,\partial)$$

ove l'unità di G_β , $i,j,k \in I_\beta$, $\mu, \partial \in \Lambda_\beta$; allora

$$(b;j,\partial) = (b;j,\mu)(1;j,\partial) = (\lambda_A(1;i,\mu))\,(1;j,\partial) =$$

$$= \lambda_A((1;i,\mu)(1;j,\partial)) = \lambda_A(1;i,\partial) = (c;k,\partial)$$

e quindi $j = k$ e $b = c$ cioé i valori dei due primi indici di $\lambda_A(1;i,\mu)$ dipendono solo da i. Si indichi con θ_A e $t^A_{\alpha,\beta}$ le applicazioni da I_β in G_β e da I_β in I_β , rispettivamente, tali che

$$\lambda_A(1;i,\mu) = (\theta_A i;\ (t^A_{\alpha,\beta})i,\mu) \qquad (3)$$

Analogamente esistono ψ_A e $A\tau_{\alpha,\beta}$ applicazioni da Λ_β in G_β e da Λ_β in Λ_β , rispettivamente, tale che

$$(1;i,\mu)\rho_A = (\mu\psi_A;i,\mu(A\tau_{\alpha,\beta})) \qquad (4)$$

Poiché si ha

$$(b;j,\mu)(\lambda_A(1;i,\partial)) = (b;j,\mu)(\theta_A i\ ;(t^A_{\alpha,\beta})i,\partial) =$$

$$=(b(\theta_A i);j,\partial) \qquad (5)$$

$$((b;j,\partial)\rho_A)(1;i,\partial) = (b;j,\mu)((1,j,\mu)\rho_A)(1;i,\partial) =$$

$$= (b;j,\mu)(\mu\psi_A;i,\mu(A\tau_{\alpha,\beta}))(1;i,\partial) =$$

$$= (b(\mu\psi_A);j,\partial) \qquad (6)$$

per ogni $b \in G_\beta$, $i,j \in I_\beta$ ed $\mu,\partial \in \Lambda_\beta$, e poiché λ_A e ρ_A sono associate [cfr. Lemma 3.2], segue da (5) e (6) che

$$b(\mu\psi_A) = b(\theta_A\ i)$$

per ogni $b \in G_\beta$, $i \in I_\beta$ e $\mu \in \Lambda_\beta$, pertanto

$$\mu\ \psi_A = \theta_A i$$

per ogni $\mu \in \Lambda_\beta$, $i \in I_\beta$.

Si indichi con $A\xi_{\alpha,\beta}$ l'elemento di G_β uguale a $\theta_A i$, per ogni $i \in I_\beta$.
Si è provata allora l'esistenza di tre applicazioni:

$$\xi_{\alpha,\beta} : A \in S_\alpha \to A\,\xi_{\alpha,\beta} \in G_\beta$$

$$t_{\alpha,\beta} : A \in S_\alpha \to t^A_{\alpha,\beta} \in \widetilde{\mathscr{T}}(I_\beta)$$

$$\tau_{\alpha,\beta} : A \in S_\alpha \to A\tau_{\alpha,\beta} \in \mathscr{T}(\Lambda_\beta)$$

Si verifica facilmente che esse sono omomorfismi, ricordando che $\lambda_{AA'} = \lambda_A \lambda_{A'}$ ed $\rho_{AA'} = \rho_A \rho_{A'}$ per ogni $A, A' \in S_\alpha$ [Lemma 3.2]. Si indichi con $Z_{\alpha,\beta}$, l'applicazione da G_α in G_β tale che

$$\text{(7)} \qquad a\,Z_{\alpha,\beta} = (a;i,\lambda)\xi_{\alpha,\beta}$$

per ogni $a \in G_\alpha$, $i \in I_\alpha$ e $\lambda \in \Lambda_\alpha$.

Tale applicazione è ben posta; infatti, per ogni $i,j \in I_\alpha$, $\lambda, \mu \in \Lambda_\alpha$ ed $a \in G_\alpha$,

$$\begin{aligned}(a;i,\lambda)\xi_{\alpha,\beta} &= ((1;i,\lambda)(a;j,\mu)(1;i,\lambda))\xi_{\alpha,\beta} \\ &= (a;j,\mu)\xi_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

poiché $\xi_{\alpha,\beta}$ è un omomorfismo.

Facilmente segue che $Z_{\alpha,\beta}$ è un omomorfismo dal fatto che $\xi_{\alpha,\beta}$ è un omomorfismo.

Siano ora $A = (a;j,\lambda) \in S_\alpha$ ed $B = (b;i,\mu) \in S_\beta$; allora

$$\begin{aligned}AB &= \lambda_A(B) = \lambda_A((1;j,\mu)B) = (\lambda_A(1;j,\mu))B = \\ &= ((A\,\xi_{\alpha,\beta})b;(t^A_{\alpha,\beta})j,\mu) \qquad \text{(per la (3))} \\ &= ((aZ_{\alpha,\beta})b;\ (t^A_{\alpha,\beta})j,\mu) \quad \text{(per la (7)}\end{aligned}$$

Si ottiene in modo analogo l'espressione di BA e quindi si ha la tesi.

Si adotta la notazione $\langle\chi\rangle$ per denotare il valore costante di una applicazione costante $\bar{\chi}$.

TEOREMA 5.5. -

(B.0) Sia Y un semireticolo; ad ogni α in Y corrisponda un gruppo rettangolare $S_\alpha = {}_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$. Si assumi che

$$S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset \quad \text{se} \quad \alpha \neq \beta.$$

Per ogni coppia $(\alpha,\beta) \in Y \times Y$ tale che $\alpha \geq \beta$ si abbiano tre omomorfismi

$$Z_{\alpha,\beta} : G_\alpha \to G_\beta \qquad t_{\alpha,\beta}: S_\alpha \to \widetilde{\mathscr{T}}(I_\beta) \qquad \tau_{\alpha,\beta} : S_\alpha \to \mathscr{T}(\Lambda_\beta)$$

soddisfacenti le seguenti condizioni:

(B.1) Se $\alpha \in Y$ ed $A = (a;i,\lambda) \in S_\alpha$, allora

$$aZ_{\alpha,\alpha} = a \qquad < t_{\alpha,\alpha} A > = 1 \qquad < A\, \tau_{\alpha,\alpha} > = \lambda$$

(B.2) Per α,β arbitrari elementi di Y, e $A \in S_\alpha$, $B \in S_\beta$,

$$(t_{\alpha,\alpha\beta} A)(t_{\beta,\alpha\beta} B) \qquad \text{ed} \qquad (A\tau_{\alpha,\alpha\beta})(B\tau_{\beta,\alpha\beta})$$

sono trasformazioni costanti di $I_{\alpha\beta}$ ed $\Lambda_{\alpha\beta}$, rispettivamente.

Su $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ si definisce il prodotto di $A = (a;i,\lambda) \in S_\alpha$ e $B = (b;j,\mu) \in S_\beta$ come

(8) $$AB = (aZ_{\alpha,\alpha\beta}\, bZ_{\beta,\alpha\beta} ;< t_{\alpha,\alpha\beta} A \;\; t_{\beta,\alpha\beta} B > ,< A\tau_{\alpha,\alpha\beta} \;\; B\tau_{\beta,\alpha\beta} >)$$

(B.3) Per ogni $\alpha,\beta,\gamma \in Y$ ed $A \in S_\alpha$, $B \in S_\beta$

se $\alpha > \beta > \gamma$ allora $Z_{\alpha,\beta}\ Z_{\beta,\gamma} = Z_{\alpha,\gamma}$ (9)

se $\alpha\beta > \gamma$ allora $t\,(AB)_{\alpha\beta,\gamma} = t_{\alpha,\gamma}A\ \ t_{\beta,\gamma}B$ (10.1)

$$(AB)\tau_{\alpha\beta,\gamma} = A\tau_{\alpha,\gamma}\ \ B\tau_{\beta,\gamma} \quad (10.2)\ .$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, allora, con il prodotto definito da (8); S è un ortogruppo. Viceversa, ogni ortogruppo è isomorfo ad uno ottenuto con una costruzione di questo tipo.

Dim. -

Per ogni $\alpha \in Y$, sia $S_\alpha = G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ un gruppo rettangolare con Y un semireticolo, tale che $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$ (in Y). Siano $Z_{\alpha,\beta}$ $t_{\alpha,\beta}$, $\tau\tau_{\alpha,\beta}$ con $\alpha \geq \beta$ $(\alpha,\beta \in Y)$ gli omomorfismi dati nel teorema e inoltre su $\bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ sia definito il prodotto (8) che coincide con quello dato su ogni singolo $S_\alpha(\alpha\in Y)$ in virtù della condizione (B.1).

Proviamo che il prodotto (8) è associativo. Siano $A,B,C \in S$ con $A = (a;i_\alpha,\mu_\alpha) \in S_\alpha$, $B = (b;\ i_\beta,\mu_\beta)$ X ed $C = (c;i_\gamma,\mu_\gamma)$ in S_γ $(\alpha,\beta,\gamma\in Y)$,

$(AB)C = (\ (aZ_{\alpha,\alpha\beta}bZ_{\beta,\alpha\beta})Z_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}cZ_{\gamma,\alpha\beta\gamma};\ < t_{\alpha\beta\,\alpha\beta\gamma}AB\ \ t_{\gamma,\alpha\beta\gamma}C > ,$

$< AB\tau_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\ C\tau_{\gamma,\alpha\beta\gamma}>)$ (per la (8)) =

$= (aZ_{\alpha,\alpha\beta\gamma}bZ_{\beta,\alpha\beta\gamma}\ cZ_{\gamma,\alpha\beta\gamma};< t_{\alpha,\alpha\beta\gamma}A\ \ t_{\beta,\alpha\beta\gamma}B\ \ t_{\gamma,\alpha\beta\gamma}C > ,$

$= <A\tau_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\ B\tau_{\beta,\alpha\beta\gamma}C\tau_{\gamma,\alpha\beta\gamma}>)$ (per (B.3)) =

$A(BC) = (aZ_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\ (bZ_{\beta,\beta\gamma}\ cZ_{\gamma,\beta\gamma})Z_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma};< t_{\alpha,\alpha\beta\gamma}A\ \ t_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}BC > ,$

$< A\tau_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\ \ BC\tau_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma} >) =$

$= (aZ_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\ bZ_{\beta,\alpha\beta\gamma},\quad cZ_{=},\quad ;<t_{\alpha,\alpha\beta\gamma}A\ \ t_{\beta,\alpha\beta\gamma}B\ \ t_{\gamma,\alpha\beta\gamma}C> ,$

$<A\tau_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\ B\tau_{\beta,\alpha\beta\gamma}\ C\tau_{\gamma,\alpha\beta\gamma}>).$

E' evidente quindi, per il Corollario 5.2, che S è un ortogruppo.

Viceversa, sia S un ortogruppo e sia $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ la sua espressione come semireticolo di gruppi rettangolari e si indichi ancora con S il semigruppo isomorfo al precedente con gli S_α della forma $G_\alpha \times I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ $(\alpha\in Y)$.

Siano $\alpha,\beta\in Y$ tali che $\alpha>\beta$ e si consideri gli omomorfismi $Z_{\alpha,\beta}$, $t_{\alpha,\beta}$, $\tau_{\alpha,\beta}$ relativi ad $S_\alpha \cup S_\beta$ del Lemma 5.4, definendo $Z_{\alpha,\alpha}$, $t_{\alpha,\alpha}$, $\tau_{\alpha,\alpha}$ $(\alpha\in Y)$ come in (B.1). Allora considerati α,β arbitrari elementi di Y ed $A \in S_\alpha$, $B \in S_\beta$ si vuole provare che $t_{\alpha,\alpha\beta}A\ t_{\beta,\alpha\beta}B$ è una applicazione costante. Sia $\bar\lambda \in \Lambda_{\alpha\beta}$; per ogni $i \in I_{\alpha\beta}$ si ponga

$$\underline{i} = (1_{\alpha\beta};\ i,\ \bar\lambda\ )$$

dove $1_{\alpha\beta}$ è l'unità di $G_{\alpha\beta}$, allora

$$B\underline{i} = (bZ_{\beta,\alpha\beta};\ (t_{\beta,\alpha\beta}B)i\ ,\ \bar\lambda)$$

per il Lemma 5.4 (si tenga conto che $\beta > \alpha\beta$) e quindi

(11) $$A(B\underline{i}) = (aZ_{\alpha,\alpha\beta}bZ_{\beta,\alpha\beta};\ (t_{\alpha,\alpha\beta}A\ \ t_{\beta,\alpha\beta}B)i,\ \bar\lambda)$$

per il lemma 5.4 (si tenga conto che $\alpha \geq \alpha\beta$).

Posto $AB = (c;j,\mu)$

$$A(B\underline{i}) = (AB)\underline{i} = (c;j,\bar\lambda) \qquad (12)$$

Confrontando (11) e (12) segue che $t_{\alpha,\alpha\beta}A\ \ t_{\beta,\alpha\beta}B$ è costante e $<t_{\alpha,\alpha\beta}A\,t_{\beta,\alpha\beta}B> = j$ ed $c = aZ_{\alpha,\alpha\beta}\ bZ_{\beta,\alpha\beta}$; così pure $A\tau_{\alpha,\alpha\beta}\ B\tau_{\beta,\alpha\beta}$ è costante ed $<A\tau_{\alpha,\alpha\beta}\ B\tau_{\beta,\alpha\beta}> = \mu$.

A questo punto è immediata l'uguaglianza (8) del teorema.

Si verificano ora le (10.1) e (10.2). Siano $A,B,C \in S$
$A = (a;i_\alpha,\mu_\alpha) \in S_\alpha$, $B = (b;i_\beta,\mu_\beta) \in S_\beta$, $C = (c;i_\gamma,\mu_\gamma) \in S_\gamma$,

con $\alpha\beta > \gamma$

$$(AB)C = ((aZ_{\alpha,\alpha\beta}\, bZ_{\beta,\alpha\beta})Z_{\alpha\beta,\gamma}\, c\, ;\, (t_{\alpha\beta,\gamma}AB)\, i_\gamma;\mu_\gamma)$$

per la (8) che si è ottenuta ed il Lemma 5.4, inoltre $A(BC)=A(bZ_{\beta,\gamma}c;$
$(t_{\beta,\gamma}B)i_\gamma,\mu_\gamma)$ (per il Lemma 5.4 ; $\beta \geq \alpha\beta > \gamma$) =

$$= (aZ_{\alpha,\gamma}bZ_{\beta,\gamma}c;\, (t_{\alpha,\gamma}A)(t_{\beta,\gamma}B)i_\gamma\, ,\, \mu_\gamma)$$

(per Lemma 5.4; $\alpha \geq \alpha\beta > \gamma$) ne segue, dalla associatività di S, la (10.1). Da $C(AB) = (CA)B$ segue analogamente la (10.2), mentre dall'uguaglianza $(AB)C = A(BC)$ con $A \in S_\alpha$, $B \in S_\beta$ e $C \in S_\gamma$ tali che $\alpha > \beta > \gamma$ si ottiene la (9) (applicando più volte il prodotto nella forma del Lemma 5.4).

<u>COROLLARIO 5.6.</u> (Petrich, /8/). -

Sia Y un semireticolo; ad ogni $\alpha \in Y$ corrisponda una banda rettangolare $E_\alpha = I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ tale che $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$ se $\alpha \neq \beta$. Per ogni coppia $(\alpha,\beta) \in Y \times Y$ tale che $\alpha \geq \beta$ si abbiano due omomorfismi

$$t_{\alpha,\beta}: E_\alpha \to \widetilde{\mathscr{T}}(I_\beta) \qquad \tau_{\alpha,\beta}: E_\alpha \to \mathscr{T}(\Lambda_\beta)$$

soddisfacenti le seguenti condizioni:

(C.1) Se $\alpha \in Y$ ed $A = (i;\lambda) \in E_\alpha$, allora

$$< t_{\alpha,\alpha}A > = i \qquad , \qquad <A\tau_{\alpha,\alpha}> = \lambda$$

(C.2) Se α , β sono arbitrari eđmenti di Y, e $A \in E_\alpha$,

$B \in E_\beta$, allora

$$(t_{\alpha,\alpha\beta} A)(t_{\beta,\alpha\beta} B) \quad \text{ed} \quad (A\tau_{\alpha,\alpha\beta})(B\tau_{\beta,\alpha\beta})$$

sono trasformazioni costanti di $I_{\alpha\beta}$ e $\Lambda_{\alpha\beta}$, rispettivamente.

Su $E = \bigcup_{\alpha\in Y} E_\alpha$ si definisce il prodotto di $A = (i,\lambda) \in E_\alpha$ e $B = (j,\mu)\in E_\beta$, come

$$(13) \qquad AB = (\langle t_{\alpha,\alpha\beta} A \; t_{\beta,\alpha\beta} B\rangle, \langle A\tau_{\alpha,\alpha\beta} \; B\tau_{\beta,\alpha\beta}\rangle)$$

(C.3) Per ogni $\alpha,\beta,\gamma\in Y$ e $A \in E_\alpha$, $B \in E_\beta$, se $\alpha\beta>\gamma$, allora

$$t_{\alpha\beta,\gamma} AB = t_{\alpha,\gamma} A \quad t_{\beta,\gamma} B \qquad (14.1)$$

$$AB\tau_{\alpha\beta,\gamma} = A\tau_{\alpha,\gamma} \quad B\tau_{\beta,\gamma} \qquad (14.2) .$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, allora, con il prodotto definito da (13), E è una banda. Viceversa, ogni banda è isomorfa ad una ottenuta con una costruzione di questo tipo.

<u>COROLLARIO 5.7.</u> - (Clifford, /4/)

Sia Y un semireticolo; ad ogni $\alpha\in Y$ è associato un gruppo G_α tale che $G_\alpha \cap G_\beta = \emptyset$ se $\alpha\neq\beta$. Ad ogni coppia $(\alpha,\beta) \in Y \times Y$ tale che $\alpha \geq \beta$, assegniamo un omomorfismo $Z_{\alpha,\beta}$ da G_α in G_β tale che

(D.1) $Z_{\alpha\alpha}$ sia l'omomorfismo identico di G_α.

(D.2) Per ogni $\alpha,\beta,\gamma\in Y$ tali che $\alpha>\beta>\gamma$

$$Z_{\alpha,\beta} \; Z_{\beta,\gamma} = Z_{\alpha,\gamma} \quad .$$

Sia S l'unione di tutti i gruppi G_α $(\alpha\in Y)$, e definiamo il prodotto di due elementi a_β, $b_\beta\in S$ $(a_\alpha\in G_\alpha$, $b_\beta\in G_\beta)$ come

$$a_\alpha b_\beta = (a \; Z_{\alpha,\gamma})(b \; Z_{\beta,\gamma})$$

dove γ è il prodotto $\alpha\beta$ nel semireticolo Y.

Allora S è un semigruppo unione di gruppi e in cui gli idempotenti commutano (o equivalentemente, un semigruppo inverso che è unione di gruppi). Viceversa, ogni tale semigruppo è isomorfo ad uno ottenuto con una tale costruzione.

Accettato per la pubblicazione su parere favorevole del Prof. Franco MIGLIORINI

B I B L I O G R A F I A

/1/ CLIFFORD,A.H. - *A strutture theorem for ortogroups*, J.of Pure and Applied Alg. 8 (1976) 23-50.

/2/ CLIFFORD,A.H. - *The strutture of ortodox unions of groups*. Sem.Forum Vol. 3 (1972);283

/3/ CLIFFORD,A.H - PETRICH M. - *Some classes of completely Regular Semigroups* - J.Algebra 46, (1977) 462-480.

/4/ CLIFFORD,A.H. - PRESTON,G B. - *The algebraic theory of semigroups* Vol. I (1961)

/5/ HOWIE,J.M. - *An Introduction to Semigroups Theory* - Accademic Press-London, New York, 1976

/6/ FANTHAM,P.H.H.- *On the classification of a certain type of semigroups*. Proc. London Math. Soc. 10(1960) 409-427

/7/ LALLEMENT,G. - *Demigroups réguliers*, Ann.Mat.Pura Appl. (4) 77 (1967) 47-129.

/8/ PETRICH,M. - *A construction and a classification of Bands*. Math. Nachr. 48 (1971), 263-274.

/9/ PETRICH,M. - *Introduction to Semigroups*. Charles E. Merrill,Columbus, Ohio, 1973)

/10/ PETRICH,M. - *The strutture of completely regular semigroups*. Trans. Amer.Math.Soc. 189 (1974) 211-236.

/11/ STEINFELD,O. - *Quasi-ideals in rings and semigroups*. Akadémiai Kiadò - Budapest 1978.

/12/ CATINO,F. - *A Classifications of Orthogroups* (in pubblicazione).