

3. - Miglioramento dell'approssimazione per eccesso dell'autovalore
 μ_{01} e dell'approssimazione per difetto dell'autovalore μ_{11} .

Sia K un operatore compatto positivo e si indichi con $\{\sigma_2^{(v)}\}$ una successione verificante le seguenti condizioni:

$$\sigma_2^{(v)} \geq \sigma_2^{(v+1)}, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \sigma_2^{(v)} = \mu_2.$$

Una siffatta successione è fornita dalla (7) e dai casi particolari che da essa si possono ottenere.

Sia q un indice tale che, per $v \geq q$, riesca

$$(18) \quad \mu_1^{(v)} > \sigma_2^{(q)}.$$

Si dimostra ⁽¹⁾, allora, che per l'autovalore μ_1 sussiste la seguente limitazione per eccesso

$$(19) \quad \mu_1 \leq \frac{M_1^{(v)} - \sigma_2^{(q)} \mu_1^{(v)}}{\mu_1^{(v)} - \sigma_2^{(q)}}$$

ed inoltre

$$\mu_1 = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{M_1^{(v)} - \sigma_2^{(q)} \mu_1^{(v)}}{\mu_1^{(v)} - \sigma_2^{(q)}}.$$

(1) Cfr. [5]

La (19) applicata relativamente all'operatore K_0 diventa:

$$(20) \quad \mu_{01} \leq \frac{M_{01}^{(v)} - \sigma_{02}^{(q)} \mu_{01}^{(v)}}{\mu_{01}^{(v)} - \sigma_{02}^{(q)}} .$$

La formula (19) può applicarsi anche relativamente all'operatore K_1 e con considerazioni elementari si ottiene la seguente approssimazione per difetto di μ_{11} :

$$(21) \quad \mu_{11} \geq \frac{M_{11}^{(v)} - \sigma_{12}^{(q)} \mu_{12}^{(v)}}{\mu_{12}^{(v)} - \sigma_{12}^{(q)}} .$$

La (20) e la (21) sono state applicate assumendo $v = 10$, $q = 10$ e $v = 17$, $q = 17$; in entrambi i casi la (18) è verificata assumendo come $\sigma_2^{(q)}$ il valore $\sigma_{i2}^{(q)}$ ($i=0,1$) ottenuto rispettivamente per $v = 10$ e $v = 17$ dalla (7) per $s = 2$ e $n = 1$.

Le limitazioni ottenute sono le seguenti:

$$\mu_{01} < 1,21694264 \quad \text{per } v = 10,$$

$$\mu_{01} < 1,21694157 \quad \text{per } v = 17;$$

$$\mu_{11} > -0,23071302 \quad \text{per } v = 10,$$

$$\mu_{11} > -0,23071172 \quad \text{per } v = 17.$$