3.- Il metodo degli invarianti ortogonali.

Per quanto concerne gli invarianti ortogonali (cfr. (12_o) e (12_1), si hanno i seguenti sviluppi in serie

$$(17_o) \qquad \mathcal{J}_1^n(K_o) = \sum_{h_1,\dots,h_n}^{0,\infty} \; \sum_{s_1,\dots,s_n}^{0,\infty} \frac{1}{(2h_1)!\dots(2h_n)!}$$

$$\frac{1}{s_1!\dots s_n!\;\left[2(h_1+h_2+s_1)+1\right]\dots\left[2(h_n+h_1+s_n)+1\right]}$$

$$\frac{1}{2^{(s_1+\dots+s_n)+2(h_1+\dots+h_n)}}$$

$n=1,2,\dots\dots$.

$$(17_1) \qquad \mathcal{J}_1^n(K_1) = (-1)^n \sum_{h_1,\dots,h_n}^{0,\infty} \; \sum_{s_1,\dots,s_n}^{0,\infty} \frac{1}{s_1!\dots s_n!}$$

$$\frac{1}{(2h_1+1)!\dots(2h_n+1)!\;\left[2(h_1+h_2+s_1)+3\right]\dots\left[2(h_n+h_1+s_n)+3\right]}$$

$$\frac{1}{2^{(s_1+\dots+s_n)+2(h_1+\dots+h_n)+n}}$$

$n=1,2,\dots\dots$.

Prima di eseguire il calcolo delle approssimazioni $\sigma_{i,j}^{(\nu)}$ mediante la (7), si è determinata una maggiorazione del resto della serie che rappresenta l'invariante $\mathcal{J}_1^n(K_i)$.

Per quanto riguarda la maggiorazione del resto della serie al secondo membro della (17_o), si è proceduto nel modo seguente.

Posto:

$$a_{h_1 \ldots h_n s_1 \ldots s_n} = \frac{1}{(2h_1)! \ldots (2h_n)! s_1! \ldots s_n! \left[2(h_1+h_2+s_1)+1\right] \ldots}$$

$$\frac{1}{\left[2(h_n+h_1+s_n)+1\right] \; 2^{2(h_1+\ldots+h_n)+(s_1+\ldots+s_n)}}$$

$$b_{h_j} = \frac{1}{(2h_j)! \; 2^{2h_j}} , \qquad c_{s_j} = \frac{1}{s_j! \; 2^{s_j}}$$

$$j = 1,2,\ldots,n \quad ;$$

$$d_{s_j h_j h_{j+1}} = \frac{1}{2(h_j+h_{j+1}+s_j)+1} \qquad j = 1,2,\ldots,n-1 \quad ;$$

$$d_{s_n h_n h_1} = \frac{1}{2(h_n+h_1+s_n) + 1} \; ;$$

riesce ovviamente

$$a_{h_1 \ldots h_n s_1 \ldots s_n} = b_{h_1} \ldots b_{h_n} \, c_{s_1} \ldots c_{s_n} \, d_{s_1 h_1 h_2} \ldots d_{s_n h_n h_1} \quad .$$

Si considerino ora le seguenti serie:

$$\sum_{h_j=o}^{\infty} b_{h_j} \; ; \qquad \sum_{s_j=o}^{\infty} c_{s_j} d_{s_j h_p h_q}$$

ove p e q possono assumere uno dei valori $1,2,\dots,n$.

Si dimostra, qualunque sia $j = 1,2,\dots,n$ e qualunque siano p e q $(p,q=1,\dots,n)$, che

$$\sum_{h_j=o}^{m} b_{h_j} < \rho_{om} \;, \qquad \sum_{h_j=m+1}^{\infty} b_{h_j} < \sigma_{om}$$

ove

$$\rho_{om} = 1 + \frac{2}{15}\left(1 - \frac{1}{4^{2m}}\right) \;, \qquad \sigma_{om} = \frac{(2m+3)^2}{(2m+2)!\, 4^m \left[4(2m+3)^2 - 1\right]} \;,$$

e che

$$\sum_{s_j=o}^{m} c_{s_j} d_{s_j h_p h_q} < \alpha_{om}, \qquad \sum_{s_j=m+1}^{\infty} c_{s_j} d_{s_j h_p h_q} < \beta_{om}$$

ove

$$\alpha_{om} = 1 + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{4^m}\right) \;, \qquad \beta_{om} = \frac{m+2}{2^m (m+1)!\,(2m+3)^2} \;.$$

D'altra parte, il resto della serie al secondo membro della (17_o) è dato da:

$$\mathcal{R}^{m}_{1n}(K_o) = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\gamma_1 \ldots \gamma_p} \sum_{h_{\gamma_1} \ldots h_{\gamma_p}}^{o,m} \sum_{h_{\gamma_{p+1}} \ldots h_{\gamma_n}}^{m+1,\infty} \sum_{s_1 \ldots s_n}^{o,\infty} a_{h_{\gamma_1} \ldots h_{\gamma_p} h_{\gamma_{p+1}} \ldots h_{\gamma_n} s_1 \ldots s_n} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-1} \sum_{\delta_1 \ldots \delta_q} \sum_{h_1 \ldots h_n}^{o,m} \sum_{s_{\delta_1} \ldots s_{\delta_q}}^{o,m} \sum_{s_{\delta_{q+1}} \ldots\ldots s_{\delta_n}}^{m+1,\infty} a_{h_1 \ldots h_n s_{\delta_1} \ldots s_{\delta_q} s_{\delta_{q+1}} \ldots s_{\delta_n}} +$$

$$+ \sum_{h_1 \ldots h_n}^{m+1,\infty} \sum_{s_1 \ldots s_n}^{o,\infty} a_{h_1 \ldots h_n s_1 \ldots s_n} +$$

$$+ \sum_{h_1 \ldots h_n}^{o,m} \sum_{s_1 \ldots s_n}^{m+1,\infty} a_{h_1 \ldots h_n s_1 \ldots s_n}$$

ove con $\gamma_1 \ldots \gamma_p \gamma_{p+1} \ldots \gamma_n$ $(\delta_1 \ldots \delta_q \delta_{q+1} \ldots \delta_n)$ si è indicata una generica disposizione semplice dei numeri $1,2,\ldots,n$ ottenuta scegliendo come $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ $(\delta_1 \ldots \delta_q)$ una combinazione senza ripetizione di classe p (di classe q) dei numeri $1,2,\ldots,n$.

Con il simbolo $\sum\limits_{\gamma_1 \ldots \gamma_p}$ $(\sum\limits_{\delta_1 \ldots \delta_q})$ si intende la sommatoria ottenuta al variare di $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ $(\delta_1 \ldots \delta_q)$ nell'insieme delle combinazioni senza ripetizioni di classe p (di classe q) dei numeri $1,2,\ldots,n$.

Con calcoli elementari si ottiene

$$\mathcal{R}^{m}_{1n}(K_o) < (\alpha_{om} + \beta_{om})^n \left[\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} \rho_{om}^{p} \sigma_{om}^{n-p} + \sigma_{om}^{n} \right]$$

$$+ \rho_{om}^{n} \left[\sum_{q=1}^{n-1} \binom{n}{q} \alpha_{om}^{q} \beta_{om}^{n-q} + \beta_{om}^{n} \right]$$

$$= \left[(\alpha_{om} + \beta_{om}) (\rho_{om} + \sigma_{om}) \right]^{n} - \alpha_{om}^{n} \rho_{om}^{n} \ .$$

Per quanto riguarda il resto della serie che rappresenta l'invariante $\mathcal{J}_1^n (K_1)$, procedendo in modo del tutto analogo si ottiene la seguente maggiorazione:

$$R_{1n}^{m} (K_1) < (-1)^{n} \{ \left[(\alpha_{1m}+\beta_{1m}) (\rho_{1m}+ \sigma_{1m}) \right]^{n} - \alpha_{1m}^{n} \rho_{1m}^{n} \}$$

essendo:

$$\alpha_{1m} = \frac{1}{3}(1 +2 \frac{4^{m}-1}{5 \cdot 4^{m}}), \qquad \beta_{1m} = \frac{m+2}{2^{m}(m+1)!(2m+3)(2m+5)} ,$$

$$\rho_{1m} = \frac{4^{2m+2} - 1}{30 \cdot 4^{2m}} , \qquad \sigma_{1m} = \frac{(m+2)^{2}}{(2m+3)!2^{2m-1} \left[16(m+2)^{2}-1\right]} .$$

Le approssimazioni $\sigma_{ij}^{(\nu)}$ sono state calcolate considerando i seguenti valori di s e di n: $s = 1$, $n = 1,2,3$; $s = 2$, $n = 1$.

Nelle tabelle n. $2_i, 3_i, 4_i$ e 5_i $(i=0,1)$ sono riportati i valori $\sigma_{ij}^{(\nu)}$ ottenuti per $j = 1,2,3,4$ sia per $\nu = 10$ che per $\nu = 17,30$ e relativi agli invarianti $\mathcal{J}_1^n (K_i)$ $(n=1,2,3)$ ed $\mathcal{J}_2^1(K_i)$ rispettivamente.

Per $\nu = 10$ e $\nu = 17$ nell'applicazione della (7) sono state utilizzate come approssimazioni per difetto nel caso dell'operatore K_0 (per eccesso nel caso dell'operatore $-K_1$) i valori $\sqrt{M_{oj}^{(\nu)}}$ $(-\sqrt{M_{1j}^{(\nu)}})$.

Successivamente sono stati applicati, relativamente all'operatore K_0, procedimenti di raffinamento del metodo degli Invarianti Ortogonali [1]. I risultati numerici così conseguiti sono riportati nella tabella n. 6_0 in appendice al presente lavoro. Tuttavia nel problema in esame i suddetti metodi non hanno fornito miglioramenti significativi rispetto ai risultati numerici conseguiti mediante la (7).

---

(1) Cfr. [4], [6]