Calcolo degli autovalori di una equazione integrale di Fredholm di 2^a specie a nucleo simmetrico del "ciclo chiuso".

di Maria Laura Leuzzi (Lecce)

Il presente lavoro concerne il calcolo degli autovalori di una equazione integrale di Fredholm di 2^a specie a nucleo simmetrico del "ciclo chiuso", secondo la locuzione di Vito Volterra.

Precisamente si consideri una funzione reale $k(t)$ della variabile reale t, la quale sia continua nell'intervallo $-a \leq t \leq a$ ed ivi funzione pari della variabile t.

Posto $K(x,y) = k(x-y)$, l'equazione integrale di Fredholm considerata è la seguente:

$$(1) \qquad \int_0^a K(x,y)\, u(y)\, dy = \mu\, u(x).$$

I.Stakgold [1], studiando tale problema, si propone il calcolo degli autovalori applicando il ben noto metodo di Alexander Weinstein e costruisce, a tal fine, il problema di base indispensabile per la applicazione del metodo stesso.

Si è ritenuto che la applicazione del procedimento di Stakgold al calcolo degli autovalori per la equazione (1) non sia conveniente per i motivi che si vengono ad illustrare.

E' intanto, ovvio che, mediante una traslazione sull'asse reale, la quale lascia immutato il nucleo $K(x,y)$, ci si può ricondurre dall'intervallo (o,a) all'intervallo $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, cioé si può scrivere la (1) al modo seguente:

([1]) Cfr. [8].

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K(x,y)\, u(y)\, dy = \mu\, u(x). \tag{2}$$

Si ha:

$$\mathcal{L}^2(-\tfrac{a}{2}, \tfrac{a}{2}) = \mathcal{L}_0^2(-\tfrac{a}{2}, \tfrac{a}{2}) \oplus \mathcal{L}_1^2(-\tfrac{a}{2}, \tfrac{a}{2}),$$

essendo $\mathcal{L}^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ l'ordinario spazio di Hilbert reale delle funzioni di quadrato sommabile in $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, $\mathcal{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ il sottospazio di $\mathcal{L}^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ costituito da tutte le funzioni pari ed $\mathcal{L}_1^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ il sottospazio delle funzioni dispari.

Si indichi con K l'operatore al primo membro della (2). Sussiste il seguente teorema:

I. - <u>I sottospazi</u> $\mathcal{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ <u>e</u> $\mathcal{L}_1^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ <u>sono sottospazi invarianti per l'operatore</u> K ".

Basta dimostrare che $\mathcal{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ è sottospazio invariante per l'operatore K. Infatti, com'è noto [1], se il sottospazio $\mathcal{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ è invariante per l'operatore K, tale è anche $\mathcal{L}_1^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, complemento ortogonale di $\mathcal{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$.

([1]) Cfr. [2], teorema XIV, pag. 75.

Occorre, quindi, dimostrare che, se $\phi(x) \in \mathcal{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, posto $\psi(x) = K[\phi(x)]$, riesce $\psi(x) \in \mathcal{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, cioé $\psi(x) = \psi(-x)$.

Infatti, posto $y = -t$, per la parità della $\phi(x)$, si ha:

$$\psi(x) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} k(x-y)\, \phi(y)\, dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} k(x+t)\, \phi(t)\, dt.$$

D'altra parte, per la parità delle funzioni k e ϕ, riesce:

$$\psi(-x) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} k(-x-t)\, \phi(t)\, dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} k(x+t)\, \phi(t)\, dt.$$

La tesi del teorema è, pertanto, acquisita.

Si indichi con P_0 il proiettore ortogonale di $\mathcal{L}^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ su $\mathcal{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ e si ponga $P_1 = I - P_0$, essendo I l'operatore identità.

Si ponga, inoltre

$$K_i = P_i\, K\, P_i \qquad (i = 0,1)$$

$$S_i = \mathcal{L}_i^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \qquad (i = 0,1).$$

Dal teorema precedente segue[1] che:

---

(1) Cfr. [2], teorema XV, pag. 75.

II. - "Considerati i due problemi di autovalori

$$(2_0) \qquad \mathcal{K}_0\, u = \mu\, u \qquad u \in \mathcal{L}_0^2\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),$$

$$(2_1) \qquad \mathcal{K}_1\, u = \mu\, u \qquad u \in \mathcal{L}_1^2\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),$$

le due successioni degli autovalori dei problemi (2_0) e (2_1) (nelle quali ogni autovalore è ripetuto un numero di volte pari alla rispettiva molteplicità) costituiscono la successione di tutti gli autovalori (ciascuno contato un numero di volte pari alla sua molteplicità), del problema (2)".

E' facile constatare che:

III. - "I due operatori $\mathcal{K}_0$ e $\mathcal{K}_1$ hanno le seguenti rappresentazioni integrali:

$$(3_0) \qquad \mathcal{K}_0\, u = P_0 \mathcal{K} P_0\, u = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \{K(x,y)+K(x,-y)\}\, u(y)\, dy \qquad u \in \mathcal{L}_0^2\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),$$

$$(3_1) \qquad \mathcal{K}_1\, u = P_1 \mathcal{K} P_1\, u = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \{K(x,y)-K(x,-y)\}\, u(y)\, dy \qquad u \in \mathcal{L}_1^2\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)".$$

I teoremi dimostrati costituiscono un evidente progresso nel problema del calcolo degli autovalori del problema (2) in quanto - come è ben noto - la conoscenza di spazi invarianti in problemi di approssimazione lineare consente - disponendo di sistemi per il calcolo automatico atti a fornire la approssimazione fino all'ordine n - di spingere la approssimazione stessa fino all'ordine $p \times n$, se p è il numero di sottospazi invarianti noti.

Tale notevole vantaggio viene ad essere perduto dallo Stakgold, in quanto egli non può più applicare il suo metodo di costruzione di un problema di base agli operatori (3_0) e (3_1), non essendo più i nuclei di tali operatori, nuclei del "ciclo chiuso".

Si è, allora, pensato di applicare il metodo degli "Invarianti Ortogonali" (1).

Si è considerato il problema nella ipotesi che gli operatori K_i $(i=0,1)$ siano operatori definiti in segno (positivi o negativi).

Se riesce $K_i > 0$, il metodo degli invarianti ortogonali fornisce le seguenti limitazioni per il j-simo autovalore $\mu_{i,j}$ del problema (2_i):

$$\mu_{i,j}^{(\nu)} \leq \mu_{i,j} \leq \sigma_{i,j}^{(\nu)} \qquad (4)$$

dove, detto $\{v_{i,h}\}$ un sistema di funzioni linearmente indipendenti, completo nello spazio S_i, le $\mu_{i,j}^{(\nu)}$ sono le radici della seguente equazione secolare:

$$\begin{cases} \det\{(K_i v_{i,h}, v_{i,\ell}) - \mu(v_{i,h}, v_{i,\ell})\} = 0 \\ h,\ell = 1,\dots,\nu \end{cases} \qquad (5)$$

avendo posto:

---

(1) Cfr. [3]

$$(6) \qquad (u,v) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} u(x)\, v(x)\, dx.$$

Detta $V_{i,\nu}$ la varietà determinata dai vettori $v_{i,1},\dots,v_{i,\nu}$, sia $P_{i,\nu}$ il proiettore ortogonale di S_i su $V_{i,\nu}$.

Sia $w_{i,j,\nu}$ un autovettore dell'operatore $P_{i,\nu}\, \mathcal{K}_i\, P_{i,\nu}$ corrispondente all'autovalore $\mu^{(\nu)}_{i,j}$.

Sia $P_{i,j,\nu}$ il proiettore ortogonale di S_i sullo spazio di tutti i vettori di $V_{i,\nu}$ ortogonali a $w_{i,j,\nu}$.

Si ha:

$$(7) \qquad \sigma^{(\nu)}_{i,j} = \left\{ \frac{\mathcal{J}^n_s(\mathcal{K}_i) - \mathcal{J}^n_s(P_{i,\nu}\,\mathcal{K}_i\,P_{i,\nu})}{\mathcal{J}^n_{s-1}(P_{i,j,\nu}\,\mathcal{K}_i\,P_{i,j,\nu})} + \left[\mu^{(\nu)}_{i,j}\right]^n \right\}^{\frac{1}{n}}$$

ove gli interi positivi s ed n si suppongono fissati una volta per tutte.

$\mathcal{J}^n_s$ ed $\mathcal{J}^n_{s-1}$ sono gli invarianti ortogonali di grado n ed ordine s ed $s-1$, rispettivamente, degli operatori indicati in parentesi [1].

Si ponga:

$$K_o(x,y) = \frac{1}{2}\{K(x,y) + K(x,-y)\}$$

$$K_1(x,y) = \frac{1}{2}\{K(x,y) - K(x,-y)\}.$$

---

(1) Cfr. [3]

Sia:

$$K_i^{(1)}(x,y) = K_i(x,y) \qquad (i=0,1)$$

$$K_i^{(n)}(x,y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_i^{(1)}(x,t)\, K_i^{(n-1)}(t,y)\, dt \qquad (n > 1) .$$

Si ha:

$$(8) \qquad \mathcal{J}_1^n(K_i) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_i^{(n)}(x,x)\, dx.$$

Si ha, poi, per una formula di Robert [1]:

$$(9) \quad \mathcal{J}_s^n(K_i) = (-1)^s \sum_{1 \le k \le s} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_k=s \\ r_i \ge 1}} \frac{\mathcal{J}_1^{n r_1}(K_i) \ldots \mathcal{J}_1^{n r_k}(K_i)}{r_1 \ldots r_k} \right\} .$$

E' ovvio come le cose dette vadano modificate se riesce $K_i < 0$.

Come applicazione della teoria svolta, si è considerato il caso nel quale la funzione $k(t)$ sia una funzione del tipo:

$$(10) \qquad k(t) = f(e^{t^2}),$$

essendo $f(u)$ una funzione intera della variabile u verificante le condizioni:

$$f^{(m)}(0) \ge 0 \qquad m = 0,1,\ldots .$$

([1]) Cfr. [7] .

Si dimostra in tale caso che:

IV.- L'operatore K_0, relativo alla funzione $k(t)$ definita da (10) è positivo, mentre l'operatore K_1 è negativo".

Per dimostrare il teorema relativamente all'operatore K_0 basta far vedere che, qualunque sia la funzione non identicamente nulla $\phi(x)$, sommabile $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, riesce:

$$(11) \qquad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_0(x,y)\, \phi(x)\, \phi(y)\, dy > 0.$$

Si osservi dapprima che, per le ipotesi fatte sulla f, riesce:

$$K_0(x,y) = \frac{1}{2}\left[f(e^{(x-y)^2}) + f(e^{(x+y)^2})\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[e^{k(x-y)^2} + e^{k(x+y)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, e^{kx^2} e^{ky^2} (e^{-2kxy} + e^{2kxy}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, e^{kx^2} e^{ky^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2k)^h}{h!} \left[(-1)^h x^h y^h + x^h y^h\right] =$$

$$= \sum_{k,h}^{0,\infty} a_k \frac{(2k)^{2h}}{(2h)!} x^{2h} y^{2h} e^{kx^2} e^{ky^2}.$$

Sostituendo l'espressione, ora ottenuta, nella (11) si ha:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_0(x,y)\ \phi(x)\ \phi(y)\ dy =$$

$$= \sum_{k,h}^{0,\infty} a_k \frac{(2k)^{2h}}{(2h)!} \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{kx^2} x^{2h}\ \phi(x)\ dx \right]^2 .$$

La quantità ora scritta è sicuramente positiva. Infatti, se esistesse un valore k_0 per il quale riuscisse:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{k_0 x^2}\ x^{2h}\ \phi(x)\ dx = 0,$$

la funzione $\phi(x)$ risulterebbe ortogonale a x^{2h} per ogni $h \geq 0$. Si avrebbe, allora, $\phi(x) \equiv 0$, contrariamente alle ipotesi sulla $\phi(x)$. Così è dimostrato che $\mathcal{K}_0$ è un operatore positivo. In modo analogo si dimostra che $\mathcal{K}_1$ è negativo.

Si dimostra che

V.- <u>L'invariante</u> $\mathcal{J}_1^n(\mathcal{K}_0)$ <u>si rappresenta mediante il seguente sviluppo in serie</u>:

$$\mathcal{J}_1^n(K_0) = \sum_{h_1,h_2\ldots h_{2n}}^{0,\infty} \sum_{s_1,\ldots,s_n}^{0,\infty} a_{h_1} a_{h_3} \ldots a_{h_{2n-1}}$$

$$(12)_0 \qquad \frac{(h_1)^{2h_2}(h_3)^{2h_4} \ldots (h_{2n-1})^{2h_{2n}}}{(2h_2)!\,(2h_4)! \ldots (2h_{2n})!}$$

$$\frac{(h_1+h_3)^{s_1}(h_3+h_5)^{s_2} \ldots (h_{2n-1}+h_1)^{s_n}}{s_1! \ldots s_n!\; 2^{2(h_2+h_4+\ldots+h_{2n})+2(s_1+\ldots+s_n)}}$$

$$\frac{a^{4(h_2+h_4+\ldots+h_{2n})+2(s_1+\ldots+s_n)+n}}{\left[2(h_2+h_4+s_1)+1\right]\left[2(h_4+h_6+s_2)+1\right] \ldots \left[2(h_{2n}+h_2+s_n)+1\right]} .$$

Dimostrazione:

Riesce: $\quad K_0^{(1)}(x,y) = K_0(x,y) = \sum_{h_1,h_2}^{0,\infty} a_{h_1} \frac{(2h_1)^{2h_2}}{(2h_2)!} x^{2h_2} e^{h_1 x^2} y^{2h_2} e^{h_1 y^2}$

Si calcoli, ora:

$$K_0^{(2)}(x,y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_0^{(1)}(x,t)\, K_0^{(1)}(t,y)\, dt =$$

$$= \sum_{h_1,h_2,h_3,h_4}^{0,\infty} a_{h_1} a_{h_3} \frac{(2h_1)^{2h_2}(2h_3)^{2h_4}}{(2h_2)!(2h_4)!} e^{h_1 x^2} x^{2h_2}$$

$$e^{h_3 y^2}\, y^{2h_4} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{(h_1+h_3)t^2}\, t^{2(h_2+h_4)}\, dt.$$

Ponendo in generale

$$F_{j+k,i+h} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{(j+k)t^2}\, t^{2(i+h)}\, dt,$$

si ottiene:

$$K_o^{(2)}(x,y) = \sum_{h_1,h_2,h_3,h_4}^{o,\infty} a_{h_1}\, a_{h_3}\, \frac{(2h_1)^{2h_2}(2h_3)^{2h_4}}{(2h_2)!(2h_4)!}$$

$$e^{h_1 x^2}\, x^{2h_2}\, e^{h_3 y^2}\, y^{2h_4}\, F_{h_1+h_3,h_2+h_4} .$$

Analogamente si può calcolare $K_o^{(3)}(x,y)$ ed ottenere:

$$K_o^{(3)}(x,y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_o^{(1)}(x,t)\, K_o^{(2)}(t,y)\, dt =$$

$$= \sum_{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6}^{o,\infty} a_{h_1} a_{h_3} a_{h_5} \frac{(2h_1)^{2h_2}(2h_3)^{2h_4}(2h_5)^{2h_6}}{(2h_2)!(2h_4)!(2h_6)!}$$

$$e^{h_1 x^2}\, x^{2h_2}\, e^{h_5 y^2}\, y^{2h_6}\, F_{h_1+h_3,h_2+h_4} F_{h_3+h_5,h_4+h_6} .$$

In generale, quindi, si ottiene:

$$K_o^{(n)}(x,y) = \sum_{h_1,h_2,\ldots,h_{2n}}^{0,\infty} a_{h_1} a_{h_3} \ldots a_{h_{2n-1}}$$

$$\frac{(2h_1)^{2h_2}(2h_3)^{2h_4}\ldots(2h_{2n-1})^{2h_{2n}}}{(2h_2)!(2h_4)!\ldots(2h_{2n})!} e^{h_1x^2} x^{2h_2} e^{h_{2n-1}y^2} y^{2h_{2n}}$$

$$F_{h_1+h_3,h_2+h_4} \quad F_{h_3+h_5,h_4+h_6} \ldots F_{h_{2n-3}+h_{2n-1},h_{2n-2}+h_{2n}}$$

D'altra parte, sviluppando $F_{j+k,i+h}$ si ha:

$$F_{j+k,i+h} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{(j+k)t^2} t^{2(i+h)} dt =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j+k)^r}{r!} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} t^{2(i+h+r)} dt =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j+k)^r}{r!} \left[\left(\frac{a}{2}\right)^{2(i+h+r)+1}\right] \frac{\left[1+(-1)^{2(i+h+r)+2}\right]}{2(i+h+r)+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j+k)^r a^{2(i+h+r)+1}}{r!\left[2(i+h+r)+1\right]2^{2(i+h+r)}} .$$

Sostituendo tale espressione in quella di $K_0^{(n)}(x,y)$, applicando la (8) ed eseguendo l'integrazione, si ottiene proprio la (12_0).

Tale formula permette il calcolo numerico di un valore per difetto dell'invariante $\mathcal{J}_1^n(K_0)$, con un errore tanto piccolo quanto si vuole, dato che è possibile maggiorare il resto della serie a secondo membro della (11).

Procedendo in modo del tutto analogo si dimostra che:

VI. - <u>L'invariante $\mathcal{J}_1^n(K_1)$ si rappresenta mediante il seguente sviluppo in serie:</u>

$$(12_1)\qquad \mathcal{J}_1^n(K_1) = (-1)^n \sum_{h_1,h_2,\ldots,h_{2n}}^{0,\infty} \sum_{s_1,\ldots,s_n}^{0,\infty} a_{h_1} a_{h_3} \ldots a_{h_{2n-1}} \frac{(h_1)^{2h_2+1}(h_3)^{2h_4+1}\cdots\cdots(h_{2n-1})^{2h_{2n}+1}}{(2h_2+1)!\,(2h_4+1)!\ldots(2h_{2n}+1)!}$$

$$\frac{(h_1+h_3)^{s_1}(h_3+h_5)^{s_2}\ldots(h_{2n-1}+h_1)^{s_n}}{s_1!\ldots s_n!\; 2^{2(h_2+h_4+\ldots+h_{2n})+2(s_1+\ldots+s_n)+n}}$$

$$\frac{a^{4(h_2+h_4+\ldots+h_{2n})+2(s_1+\ldots+s_n)+3n}}{[2(h_2+h_4+s_1)+3]\,[2(h_4+h_6+s_2)+3]\ldots[2(h_{2n}+h_2+s_n)+3]}\,.$$

Per quanto concerne gli esempi numerici si è considerato il caso:

$$f(u) \equiv u\,.$$