lavoro di Graunt. Queste tavole rivestono, come è noto, una importanza fondamentale nella gestione di una impresa assicurativa.

2. Tavole di vita e catene di Harkov.-

Nella costruzione delle tavole di sopravvivenza, il criterio informativo dell'elencare numericamente il numero delle persone viventi di età x per anni successivi ($x = 0,1,2,\ldots, \omega$ con ω = età estrema), risulta più adatto se si confronta il numero dei viventi con un gruppo di persone di età avanzata.

Tale procedura però, molte volte fornisce una valutazione errata della funzione di sopravvivenza.

Chiang (1968) e Keyfitz (1968) [17] [18] hanno infatti messo in rilievo che, non è tanto importante la valutazione di l_x, quanto invece lo è la proporzione $p_x (q_x = 1-p_x)$ degli individui che sopravvivono (muoiono) nell'intervallo di tempo $(x,x+1)$.

Se risultano note queste quantità possiamo, in modo molto sintetico, calcolare gli elementi delle altre colonne che formano una tavola di sopravvivenza.

Per illustrare nel modo più semplice possibile i due modi di procedere per la costruzione delle tavole in questione, formuliamo le seguenti ipotesi:

Ip a. In un periodo di sei anni si possono osservare sei gruppi limitati artificialmente ad una popolazione di 10.000 persone tra maschi e femmine.

Ip b. Il numero dei viventi di ciascun gruppo si presume noto al primo gennaio di ogni anno.

Ip c. Tutte le persone appartenenti al gruppo muoiono durante il loro sesto anno di vita.

Otteniamo così le due seguenti tavole di vita [15].

Tavola 1   Numero di individui vivi all'età x

Età x	1961	1962	1963	1964	1965	1966
0	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000
1	9.478	9.464	9.447	9.493	9.540	9.553
2	9.367	9.427	9.418	9.404	9.450	9.507
3	9.277	9.343	9.406	9.403	9.385	9.436
4	9.267	9.263	9.330	9.394	9.395	9.374
5	9.227	9.258	9.252	9.321	9.386	9.388
6	9.210	9.220	9.252	9.245	9.315	9.379

Tavola 2 - Numero individui morti tra l'età x ed x+1

Età x	1961	1962	1963	1964	1965	1966
0-1	522	536	553	507	460	447
1-2	49	51	46	43	43	33
2-3	21	24	21	15	19	14
3-4	13	14	13	12	8	11
4-5	8	9	11	9	8	7
5-6	9	7	6	7	6	7

Possiamo rapidamente osservare che per ciscun gruppo è possibile calcolare sia la proporzione $\hat{p}'_x = \frac{l'_{x+1}}{l'_x}$ dei sopravvisuti nell'intervallo di tempo (x,x+1), sia la proporzione dei deceduti nello stesso intervallo $\hat{q}'_x = \dfrac{l_x - l'_{x+1}}{l'_x}$. Tali proporzioni sono qui adoperate per mettere in evidenza soprattutto quantità basate su dati di gruppo.

Per comodità, queste, $\hat{p}'_x$, le riportiamo nella tavola seguente:

Tavola 3 - Tassi di sopravvivenza. -

	1961	1962	1963	1964	1965	1966
$\hat{p}'_0$	0,9478	0,9464	0,9447	0,9493	0,9540	0,9553
$\hat{p}'_1$	0,9883	0,9961	0,9969	0,9906	0,9905	0,9952
$\hat{p}'_2$	0,9904	0,9911	0,9987	0,9999	0,9931	0,9925
$\hat{p}'_3$	0,9989	0,9914	0,9919	0,9990	1,0000	0,9934
$\hat{p}'_4$	0,9957	0,9995	0,9916	0,9922	0,9990	1,0000
$\hat{p}'_5$	0,9981	0,9959	1,0000	0,9918	0,9924	0,9990

Abbiamo inoltre la seguente tavola per $\hat{q}'_x$

Tavola 4 - Tassi di mortalità. -

	1961	1962	1963	1964	1965	1966
$\hat{q}'_0$	0,0522	0,0536	0,0553	0,0507	0,0460	0,0447
$\hat{q}'_1$	0,0117	0,0039	0,0031	0,0094	0,0095	0,0048
$\hat{q}'_2$	0,0096	0,0089	0,0013	0,0001	0,0069	0,0075
$\hat{q}'_3$	0,0011	0,0086	0,0081	0,0010	0,0000	0,0066
$\hat{q}'_4$	0,0043	0,005	0,0084	0,0078	0,0010	0,0000
$\hat{q}'_5$	0,0019	0,0041	0,0000	0,0082	0,0076	0,0010

Facciamo notare che queste proporzioni sono state scelte deliberatamente: i miglioramenti nell'igiene e nelle cure mediche hanno causato continuamente aumenti nei tassi di sopravvivenza. Dovremmo in effetti scrivere per la prima riga della tavola 3, i valori

$$\hat{p}'_0(1961) = 0{,}9478,\ \hat{p}'_0(1962) = 0{,}9464,\ \hat{p}'_0(1963) = 09447$$

$$\hat{p}'_0(1964) = 0{,}9493,\ \hat{p}'_0(1965) = 0{,}9540,\ \hat{p}'_0(1966) = 0{,}9553$$

per indicare che queste sono percentuali di sopravvivenza per un gruppo di età compresa tra 0 ed 1 anno per l'anno 1961-62. I valori $\hat{p}_x(t)$ nelle righe successive sarebbero similmente distinti per l'anno in cui venga raggiunta l'età x.

Esaminiamo ora un altro importante risultato che possiamo dedurre dalla conoscenza delle tavole precedenti. Consideriamo come anno base il 1966, ci chiediamo: quanti saranno gli individui di età x nel 1966, che saranno vivi nel 1967?

Osserviamo, dalla tabella 2, che le proporzioni $\hat{p}_x(1966)$ sono identiche a quelle della diagonale nord-est $\hat{p}'_x(1966)$. Abbiamo infatti le seguenti tavole.

Tavola 5 - Dati e tassi di sopravvivenza per il 1966-67. -

Intervallo di età da x a $x+1$ anni	Numero l_x di viventi alla età x nel 66	Numero l_{x+1} viventi all'età $x+1$ nel 67	Proporzione $\hat{p}_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ di sopravvissuti dall'età x a $x+1$
0-1	10.000	9.553	0,9553
1-2	9.540	9.450	0,9905
2-3	9.404	9.403	0,9999
3-4	9.406	9.330	0,9919
4-5	9.263	9.258	0,9995
5-6	9.227	9.210	0,9981

Tavola 6 - Tipica tavola di vita corrente per il 1966-67.-

Intervallo di età da x ad x+1 anni	Numero l_x di viventi alla età x	Numero d_x di morti tra x e x+1	Proporzione $\hat{q}_x = \frac{d_x}{l_x}$ di morti in(x,x+1)	Proporzione $\hat{p}_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ di sopravviventi in (x,x+1)
0-1	10.000	447	0,0447	0,9553
1-2	9.553	46	0,0042	0,9951
2-3	9.507	71	0,0075	0,9925
3-4	9.436	62	0,0066	0,9934
4-5	9.374	0	0,0000	1,0000
5-6	9.388	9	0,0010	0,9990

E' importante adesso osservare che, se vogliamo mettere in evidenza il rapporto tra la tavola di vita corrente ed i processi di gruppo, dobbiamo necessariamente usare una catena di Markov.
Ciò è possibile farlo perché [7] [16] :

a) abbiamo un vettore delle probabilità iniziali del tipo $p'(0) = (p_1^{(o)}, \ldots, p_k^{(o)})$, le cui componenti sono le probabilità con cui il sistema si trova nei vari stati al tempo zero, e tale che

(1) $$p_i^{(o)} = P(S_o = i) \qquad \text{con} \quad i = 1,2,\ldots,k$$

b) abbiamo una matrice di transizione i cui k^2 elementi p_{ij} $(i = 1,\ldots,k_i;\ J = 1,\ldots,k)$ rappresentano le probabilità che il sistema passi dallo stato i al tempo x allo stato j al tempo x+1; cioé tale che

(2) $$p_{ij} = P(S_{x+1} = J\ S_x = i) \qquad x = 1,2,3,\ldots\ .$$

c) abbiamo i vincoli

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i^{(o)} = 1 \quad , \quad \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,\ldots k$$

Dalle tavole 5 e 6 quindi, si possono ricavare i rapporti di sopravvivenza $\hat{p}'_x(t)$ relativamente all'anno $t = 1966$ e quindi la probabilità di sopravvivenza da $t = 1966$ a $t+1 = 1967$. Possiamo allora scrivere la matrice di transizione $P(t) = \{p_{ij}(t)\}$ delle probabilità di sopravvivenza dall'anno $t = 1966$ all'anno $t+1 = 1967$.

Riportiamo tale matrice osservando che gli stati 0,1,2,3,4,5, rappresentano l'età x dei sopravvissuti, mentre lo stato 6 rappresenta la morte.

Tavola 7 $\qquad P(1966) =$

	0	1	2	3	4	5	6
0		$\hat{p}_0 = 0{,}9553$					$\hat{q}_0=0{,}0447$
1			$\hat{p}_1 = 0{,}9951$				$\hat{q}_1=0{,}0049$
2				$\hat{p}_2 = 0{,}9925$			$\hat{q}_2=0{,}0075$
3					$\hat{p}_3 = 0{,}9934$		$\hat{q}_3=0{,}0066$
4						$\hat{p}_4=1$	$\hat{q}_4=0$
5							$\hat{q}_5=0{,}0010$

E' chiaro che si possono costruire altre matrici di questo tipo spostandosi in anni differenti.

Bisogna osservare che se il processo è stazionario, allora la distinzione tra le probabilità di sopravvivenza $\hat{p}_x$ attuale e $\hat{p}'_x$ per il gruppo di tavole di vita diviene inutile, e la notazione $\hat{p}_x$ per $\hat{p}_x(t) = \hat{p}'_x(t)$ risulta valida per entrambe. Risulta assai raro invece il caso, che $\hat{p}_x, \hat{p}'_x$ siano alcune volte considerate uguali in prima approssimazione. E' importante comunque insistere sulle notazioni generali $\hat{p}_x(t)$ e $\hat{p}'_{(x)}t$ per evidenziare la dipendenza dal tempo del processo base della popolazione.

3. Catena binomiale di Markov in tempo discreto. -

Abbiamo visto che la (2) dà luogo ad un sistema omogeneo dal momento che p_{ij} è la stessa qualunque sia l'età x. Applichiamo allora il metodo descritto dianzi ad un sistema omogeneo. Vedremo dopo cosa accade se il sistema non è omogeneo.

Sappiamo che le distribuzioni di probabilità per il numero dei superstiti ed il tempo di estinzione di un gruppo in tempo discreto, basato sulla probabilità di sopravvivenza empirica $\hat{p}'_x(t)$, si possono ricavare semplicemente mediante sviluppo in serie binomiale [3] [4] .

Supponiamo che in un gruppo di dimensioni iniziali l_o, la probabilità di sopravvivenza di un individuo (appartenente al gruppo) dall'età x all'età $x+1$ sia p, indipendente dall'età o dal tempo.

Iniziando con l'_x individui vivi all'età x, la probabilità del numero l'_{x+1} di superstiti dopo l'intervallo $(x,x+1)$ è dato allora da:

$$(4) \qquad P_r \left\{ \frac{l'_{x+1}}{l'_x} \right\} = \binom{l'_x}{l'_{x+1}} p^{\,l'_{x+1}} (1-p)^{\,l'_x - l'_{x+1}}$$

Orbene, la (4) esprime le probabilità di transizione che governano una catena di Markov del tipo $\{l'_x\}_{x=o}^{\omega}$; gli stati di questa catena sono i numeri di sopravviventi $0,1,2,\ldots l'_o$.

E' chiaro che la distribuzione globale dei superstiti $l_1,\ldots,l_k (k<\omega)$ è data da:

$$(5) \qquad P_r \left\{ \frac{l'_1,\ldots,l'_k}{l'_o} \right\} = \prod_{x=o}^{k-1} \binom{l'_x}{l'_{x+1}} p^{\,l'_{x+1}} (1-p)^{\,l'_x - l'_{x+1}}$$

La distribuzione di l'_k , sarà allora espressa da: