La rappresentazione "incoming R_- si ottiene mediante riflessione rispetto ad s della funzione

$$-c^{\frac{1}{2}}\, \mathcal{P}(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1) + e^{\rho s}\hat{f}_2) \quad \text{se} \quad F = \{f_1,f_2\} \in C_c^\infty$$

e lo spazio incoming $\mathcal{D}'_-$ è l'insieme dei dati $F \in H$ tali per cui, $\forall t < 0$, $u(x,t) = 0$ se $d(x,j) < -t$.

Il principio di Huygens, che si enuncia nel modo seguente: se il dato iniziale $F = \{f_1,f_2\}$ è tale che $f_1(x) = f_2(x) = 0$ per ogni x per cui $d(x,j) > a$, allora $u(j,t) = 0$ per $|t| > a$ vale esclusivamente per gli spazi iperbolici reali di dimensione dispari.

Si ha ovviamente $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2 = 0$ per $|s| > a$ e, da (7)

$$u(j,t) = 1/2 \int_B (Q_+F)(-t,b)db.$$

Se M è uno spazio iperbolico reale di dimensione dispari, allora Q_+F è un operatore differenziale sulle trasformate di Radon $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2$ e quindi $Q_+F(-t,b) = 0$ per ogni $b \in B$ se $|t| > a$. Negli altri casi, il principio di Huygens non vale, infatti $u(j,t)$ è antitrasformata di Fourier di $q(-\lambda) \int_B \widetilde{R_+F}(-\lambda,b)db$. Essendo $u(j,t)$ a supporto compatto, $q(-\lambda) \int_B \widetilde{R_+F}(-\lambda,b)db$ si estende ad una funzione olomorfa intera. Ne segue che $q(\lambda)$ è olomorfa intera e ciò si verifica, per le limitazioni di $q(\lambda)$ date in sezione 2, solo quando $q(\lambda)$, e quindi $p(\lambda)$, è un polinomio.

5. LA MATRICE DELLO SCATTERING. -

Per ogni fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice dello scattering $\mathcal{S}$ è data da $\mathcal{S}(\lambda)$; $L^2(B) \longrightarrow L^2(B)$ dove $\mathcal{S}(\lambda)f = p(\lambda)(-\lambda\ \tilde{f}_1(-\lambda,b) + \tilde{f}_2(-\lambda,b))$ se f è data da $p(-\lambda)(\lambda\tilde{f}_1(\lambda,b) - \tilde{f}_2(\lambda,b))$

$\mathcal{S}$ <u>è causale se e solo se</u> p <u>è un polinomio</u>.

Supponiamo che $\mathcal{S}$ sia causale; al variare di f_1, f_2 in $C_c^\infty(X)$ le funzioni $g : (\lambda,b) \to p(-\lambda)(\lambda\tilde{f}_1(\lambda,b)-\tilde{f}_2(\lambda,b))$ appartengono ad $\mathcal{Q}_+$. L'ipotesi di causalità implica che anche le funzioni $p(\lambda)(-\lambda\tilde{f}_1(-\lambda,b)+\tilde{f}_2(-\lambda,b))$ appartengono ad $\mathcal{Q}_+$. Ne segue che $p(\lambda)$ deve estendersi ad una funzione olomorfa in $\operatorname{Im} z > 0$ e quindi che p è un polinomio.
Viceversa se p è un polinomio, allora X è uno spazio iperbolico reale di dimensione dispari. Per tali spazi, non c'è alcuna difficoltà ad estendere gli argomenti svolti nel caso di dimensione 3 in [5].

Inoltre, procedendo esattamente come in [5] si ottiene la seguente espressione per la matrice dello scattering nel caso degli spazi iperbolici reali di dimensione dispari:

$$S(\sigma) = \sum_{0}^{\infty}{}_k \oplus B_k(\sigma)\, Q_k \qquad \text{dove}$$

$$B_k(\sigma) = \varepsilon_k \prod_{m=1}^{k} \frac{\sigma+i\mu(m)\rho}{\sigma-i\mu(m)\rho} \qquad |\varepsilon_k| = 1 \quad \mu(m) = 1+\frac{2m}{n-1}$$

e Q_k è la proiezione ortogonale di N su tutto lo spazio generato dalle armoniche sferiche di ordine k.

6. Un'osservazione sulla trasformata di Radon. -

E' ovvio che se g si annulla fuori della palla di centro j e raggio r $B(j,r)$ allora

$$\hat{g}(s,b) = 0 \qquad \text{per } s > r \text{ e per ogni } b.$$

Non possiamo stabilire la proposizione inversa, ma dimostriamo che se $g \in L_2(x)$ e se $\Phi(e^{\rho s}\hat{g}) = 0$ per $s > r$ e per ogni b allora

$$g = 0 \qquad \text{fuori di } B(j,r).$$

Dimostrazione. -

Siano

$$\mathcal{D}_+^r = U(r)\mathcal{D}_+ \qquad \text{e} \qquad \mathcal{D}_-^r = U(-r)\mathcal{D}_- .$$

Premettiamo due osservazioni.

1ª Osservazione. -

Come Corollario del Lemma di Sezione 5 e del Lemma analogo per distribuzioni n del tipo

$$u(x,t) = \int_B \exp(\rho A(x,b)k_- (A(x,b)+t, b)db$$

si hanno i seguenti risultati:

$R_+ \mathcal{D}_+^r$ consiste delle funzioni $h(s,b)$ a quadrato sommabile e nulle per $s < r$.

$R_+ \mathcal{D}_-^r$ consiste delle funzioni $h(s,b)$ a quadrato sommabile e tali che se $R_+F = h$ con $F \in \mathcal{D}_-^r$ allora Q_+F soddisfa ε per $s > -a$.

$R_- \mathcal{D}_-^r$ consiste delle funzioni $h(s,b)$ a quadrato sommabile nulle per $s < a$

$R_- \mathcal{D}_+^r$ consiste delle funzioni $h(s,b)$ a quadrato sommabile e tali che se $R_-F = h$ con $F \in \mathcal{D}_+^r$ allora Q_+F soddisfa ε per $s > - a$.

2ª Osservazione. -

Con un procedimento analogo a quello usato in Lemma 3.11 [5], ma ragionando su Q_+ invece che su R_+ si può provare che:

se il dato $(0,f)$ è tale che

$$f = 0 \qquad \text{per} \quad d(x,j) < r$$

allora

$(0,f)$ si approssima con dati $(0,f_N)$ appartenenti a $\mathcal{D}_+^r + \mathcal{D}_-^r$.

Utilizzando tali fatti possiamo dimostrare ora il risultato enunciato:

se $\mathcal{P}(e^{\rho s} g) = 0$ per $s > r$ e per ogni $b \in B$, allora si ha se $G = (0,g)$

$R_+G = 0$ per $s > r$

$R_-G = 0$ per $s > r$

pertanto G è E-ortogonale a $\mathcal{D}_+^r + \mathcal{D}_-^r$.

Per la 2^a osservazione, G è E-ortogonale ai dati $(0,f)$ per cui sia $f = 0$ per $d(x,j) < r$.

Se ne deduce che g è ortogonale in $L^2(X)$ ad ogni $f \in L^2(X)$ nullo in $B(j,r)$, ovvero $g = 0$ fuori di $B(j,r)$.

B I B L I O G R A F I A

[1] M.P.Gaffney, *A special Stokes's theorem for complete riemannian manifolds*, Ann. of Math. 60,140-145,1954.

[2] S.Helgason, *A duality for symmetric spaces with applications to groups representations*, Adv. in Math., 5,1-154,1970

[3] S. Helgason, *Duality and Radon trasform for symmetric spaces*, Amer.J.Math. 85,667-692,1963

[4] S.Helgason, *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Proc. Sym. in Pure Math., 26 Amer. Math.Soc., 101-146,1973

[5] P.D.Lax-R.S.Phillps, *Translation representation for the wave equation*, Commun. on Pure and App. Math., XXXII,5,617-667,1979.

[6] P.D.Lax-R.S.Phillips, *Scattering theory*, Academic Press, N.Y. 1967

[7] M.A.Semenov-Tian-Shansky, *Harmonic Analysis on Riemannian symmetric spaces of negative curvature and scattering theory*, Math.U.S.S.R. Izv,10,535-563,1976

[8] G. Talenti, *Sulle equazioni integrali di Wiener-Hopf*, Boll. UMI, (4),7 suppl. fasc. 1,18-11+,1973.