5. LA RAPPRESENTAZIONE PER TRASLAZIONI. -

Sia X come in sezione 1 e sia Δ l'operatore di Laplace - Beltrami su X. Si ha

$$\Delta \exp[(\rho-i\lambda)A(x,b)] = -(\rho^2+\lambda^2)\exp[(\rho-i\lambda)A(x,b)]$$

e dunque l'operatore $L = \Delta + \rho^2$ ha le funzioni $\exp[(\rho-i\lambda)A(x,b)]$ come autofunzioni per gli autovalori $-\lambda^2$. Si ha allora, per ogni $f \in C_c^\infty(X)$:

$$\widehat{Lf}(s,b) = e^{-\rho s}\, \partial_s^2(e^{\rho s}\hat{f}) \ .$$

Infatti, per ogni fissato $b \in B$ $\lambda^2(\widetilde{Lf}(\lambda,b)$ è la trasformata di Fourier di $-\partial_s^2(e^{\rho s}\widehat{Lf})$ ma, essendo $\widetilde{Lf}(\lambda,b) = -\lambda^2\check{f}(\lambda,b)$, esso è anche la trasformata di Fourier di $-\partial_s^4(e^{\rho s}\hat{f})$. Si ha pertanto per f in $C_c^\infty(X)$

$$e^{\rho s}\widehat{Lf} = \partial_s^2(e^{\rho s}\hat{f}) \ .$$

Proviamo ora che

<u>se</u> $u(x,t)$ <u>con</u> $x \in X$ <u>e</u> $t \in \mathbb{R}$ <u>è a supporto compatto in</u> X, <u>allora</u> $(u,Lu) \leq 0$.

Si ha

$$(u,Lu) = c\int_B (\Phi(e^{\rho s}\hat{u}),\Phi(e^{\rho s}\widehat{Lu}))db = c\int_B(\Phi(e^{\rho s}\hat{u}),\Phi\partial_s^2(e^{\rho s}\hat{u}))db.$$

Notiamo ora che $\partial_s\Phi = \Phi\partial_s$ e che, essendo u a supporto compatto, $\Phi(e^{\rho s}\hat{u})$, $\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{u}))$ e $\Phi(\partial_s^2(e^{\rho s}\hat{u}))$ sono in $L^2(\mathbb{R})$.

La funzione $\gamma = \Phi(e^{\rho s}\hat{u}) \cdot \overline{\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{u}))}$ è allora in $L^1(\mathbb{R})$ così come la sua derivata

$$\partial_s\gamma = (\partial_s\Phi(e^{\rho s}\hat{u}))\cdot\overline{\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{u}))} + \Phi(e^{\rho s}\hat{u})\cdot\overline{\Phi(\partial_s^2(e^{\rho s}\hat{u}))}$$

Possiamo allora applicare il teorema di Stokes per varietà complete ([1]), per concludere che $\int_{\mathbb{R}} \partial_s\gamma \quad ds = 0$ e quindi $(u,Lu) = -c\int_B(\int|\Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{u}))|^2 ds)db \leq 0$

Inoltre $(u,Lu) = 0 \Leftrightarrow \Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{u})) = 0$ per quasi tutti i $b \in B \Longleftrightarrow \overline{\lambda\, p(\lambda)}\tilde{u}(\lambda,b) = 0$ per quasi tutti i b $\Longleftrightarrow \tilde{u}(\lambda,b) = 0$ per quasi tutti i $b \Leftrightarrow u = 0$.

Osservazione.

La positività di $-(u,Lu)$ e gli stessi argomenti usati in [5] p.640 danno un risultato analogo a teorema 3.3. per ogni spazio X come sopra, cioé per ogni compatto $K \subset X$, esiste una costante c_K tale che

$$\int_K u^2\, dx \leq -c_K(u,Lu) \qquad \forall u \in C_c^\infty(X).$$

Consideriamo l'equazione delle onde

$$(4) \qquad u_{tt} = Lu$$

Dalla teoria classica delleequazioni iperboliche, il problema (4), con i valori iniziali

$$u(x,0) = f_1 \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = f_2 \qquad \text{per} \quad f_1,f_2 \in C_c^\infty(X)$$

ha una sola soluzione $u(x,t)$ in $C^\infty(M\times\mathbb{R})$.

L'energia $\quad \|u\|_E^2 = \|u_t\|^2 - (u,Lu)$

per le soluzioni di (4) non dipende dal tempo t (la verifica è una facile conseguenza della simmetria di L) ed è ovviamente positiva.

Nell'insieme dei dati $F = \{f_1,f_2\}$ in $C_c^\infty(X)$

$$\|F\|_E^2 = \|f_2\|^2 - (f_1,Lf_1)$$

è allora una norma. Il completamento di C_c^∞ rispetto alla norma dell'energia sarà denotato con H.

L'operatore A dato su H da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero $A(\{f_1,f_2\}) = \{f_2, Lf_1\}$ è il generatore del gruppo ad un parametro di operatori $U(t)$, unitari rispetto alla norma dell'energia, che legano il dato iniziale $F(0) = \{f_1,f_2\}$ al dato al tempo $t: F(t) = \{u(.,t), u_t(.,t)\}$.

Nello studio dello scattering per il gruppo di operatori $U(t)$ nello spazio H iniziamo dalla definizione di due isometrie $R_\pm : H \to L^2(\mathbb{R},\mathcal{N})$ dove $\mathcal{N} = L^2(B)$, candidate per essere le rappresentazioni per traslazioni, e solo successivamente, definiremo i sottospazi incoming e outgoing.

Poniamo

$$(R_+F)(s,b) = - c^{\frac{1}{2}} \Phi(\partial_s(e^{\rho s} \hat{f}_1) - e^{\rho s} \hat{f}_2)$$

se $F = \{f_1,f_2\} \in C_c^\infty$.

Si ha $$\alpha \cdot \quad \| R_+ f \|_{L^2(\mathbb{R},\mathcal{N})} = \| F \|_E \quad .$$

Possiamo dunque estendere R_+ ad H, completamento di C_c^∞ nella norma dell'energia.

Dimostrazione di α :

$$\| R_+F \|^2 = c \int_B \int_{\mathbb{R}} |\Phi(\partial_s(e^{\rho s} \hat{f}_1) - e^{\rho s} \hat{f}_2)|^2 \, ds \, db =$$

$$= c \| \Phi(\partial_s(e^{\rho s} \hat{f}_1)) \|^2 + c \, \| \Phi(e^{\rho s} \hat{f}_2) \|^2 -$$

$$- c(\Phi(e^{\rho s} \hat{f}_2), \Phi(\partial_s(e^{\rho s} \hat{f}_1)) \qquad -c(\Phi(\partial_s(e^{\rho s} \hat{f}_1)), \Phi(e^{\rho s} \hat{f}_2))$$

mentre

$$\| F \|_E^2 = \| f_2 \|^2 + c \int_B (\int |\Phi(\partial_s(e^{\rho s} \hat{f}_1))|^2 ds) db =$$

$$= \| f_2 \|^2 + c \, \| \Phi(\partial_s(e^{\rho s} \hat{f}_1)) \|^2$$

La conclusione segue ora dai seguenti fatti

i. $\| f_2 \|^2 = c \| \Phi(e^{\rho s} \hat{f}_2) \|^2$ (vedi sezione 3)

ii. Parte reale $(\Phi(e^{\rho s}\hat{f}_2), \Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1))) = 0$.

Per ii.:

denotiamo con Φ_1 e Φ_2 gli operatori pseudodifferenziali che hanno per simboli rispettivamente p_1 e p_2 dove

$p(\lambda) = p_1(\lambda) + ip_2(\lambda)$. Si ha $p_1(\lambda) = p_1(-\lambda)$ e $p_2(\lambda) = -p_2(-\lambda)$. Allora, se $g_2(s) = \int_B \hat{f}_2(s,b)db$ e $g_1(s) = \int_B \hat{f}_1(s,b)db$:

parte reale $(\Phi(e^{\rho s}\hat{f}_2), \Phi(\partial_s(e^{\rho s}\hat{f}_1))) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_1(e^{\rho s}g_2)\cdot\Phi_1(\partial_s(e^{\rho s}g_1))\,ds +$

$+ \int_{\mathbb{R}} \Phi_2(e^{\rho s}g_2) \cdot \Phi_2(\partial_s(e^{\rho s}g_1)))ds.$

Da (2), $\Phi_1(e^{\rho s}g_2)$ e $\Phi_2(\partial_s(e^{\rho s}g_1))$ sono funzioni pari, mentre $\Phi_2(e^{\rho s}g_2)$ e $\Phi_1(\partial_s(e^{\rho s}g_1))$ sono funzioni dispari.

β. R_+ <u>trasforma</u> $U(t)$ <u>nella traslazione a destra di</u> t <u>unità</u>.

Sia F un dato in C_c^∞ , dobbiamo provare che

$$(R_+U(t)F)(s) = (R_+F)(s-t).$$

Ponendo $U(t)F = \{f_1[t], f_2[t]\}$:

$$(5) \qquad (\partial_s + \partial_t)\,(R_+U(t)F) = -\, c^{\frac{1}{2}}\, \Phi[\partial_s^2(e^{\rho s}\widehat{f_1}[t]) -$$

$$- \partial_s(e^{\rho s}\widehat{f_2}[t]) + \partial_t\partial_s(e^{\rho s}\widehat{f_1}[t]) - \partial_t(e^{\rho s}\widehat{f_2}[t]))]$$

Ma $\{f_1[t],f_2[t]\}= \{u(x,t),u_t(x,t)\}$ dove $u(x,t)$ è soluzione di (4) con dato iniziale $\{f_1,f_2\}$.

Si ha dunque $\widehat{Lf_1}[t] = \partial_t(\widehat{f_2}[t])$ da cui

$$e^{-\rho s}\ \partial_s^2\,(e^{\rho s}\ \hat{f_1}[t])(s,b)) = \partial_t\ \hat{f_2}[t]\ (s,b)$$

e

$$\hat{f_2}[t](s,b) = \partial_t\ \hat{f_1}[t](s,b).$$

Pertanto (5) diventa

$$(\partial_s + \partial_t)(R_+U(t)F)(s,b) = -\ c^{\frac{1}{2}}\ \Phi(\partial_s\partial_t(e^{\rho s}\ \hat{f_1}[t]) - \partial_s(e^{\rho s}\ \hat{f_2}[t]))(s,b) = 0$$

Ciò dimostra che $R_+U(t)F$ è solo funzione di $s-t$.

γ. R_+ <u>è una isometria di H su tutto</u> $L^2(\mathbb{R} \times B)$.

Denotiamo con $Y_\nu(b)$ le armoniche sferiche in $L^2(B)$.

Consideriamo l'insieme delle funzioni del tipo $h(s)Y_\nu(b)$, al variare di h tra le funzioni C_c^∞ a supporto compatto in R^+. Esse sono funzioni $f \in C_c^\infty(X)$ quando si usino su X coordinate polari ([4]). E' facile verificare che, per opportuna scelta di g

$$\hat{f}\ (s,b) = g(s)Y_\nu(b) \quad \text{e} \quad \tilde{f}(\lambda,b) = l(\lambda)Y_\nu(b)$$

dove $l(\lambda)$ è la trasformata di Fourier in $\mathbb{R}$ di $e^{\rho s}\ g(s)$.
Sia ora $F = \{0,f\}$; allora

$$(R_+F)(s,b) = c^{\frac{1}{2}}\ \Phi(e^{\rho s}\ \hat{f}) = c^{\frac{1}{2}}\ \Phi(e^{\rho s}g)Y_\nu(b) = k(s)Y_\nu(b)$$

Poiché anche $R_+U(t)F$ appartiene all'immagine di R_+, allora anche $k(s-t)Y_\nu(b)$, al variare di t in R, vi appartengono. I traslati di k generano $L^2(\mathbb{R})$ se e solo se $\tilde{k}$ non si annulla su un insieme di misura positiva, e poiché, per ogni $b \in B$, $\overline{p(\lambda)}\ \tilde{f}(\lambda,b)$ è la trasformata di Fourier reale di $\Phi(e^{\rho s}\ \hat{f})$ si ha $\overline{p(\lambda)}\tilde{f}(\lambda,b) = c^{-\frac{1}{2}}\tilde{k}(\lambda)Y_\nu(b)$.

Essendo f a supporto compatto , $\tilde{f}(\lambda,b)$ è una funzione intera di λ ([4]); se $\tilde{k}(\lambda)$ si annullasse su un insieme di misura positiva dovrebbe essere $\tilde{f} \equiv 0$

e quindi $f \equiv 0$.

<u>Vale la seguente formula per la soluzione</u> $u(x,t)$ <u>dell'equazione delle onde con dato iniziale</u> $F \in C_c^\infty$

(6) $$u(x,t) = c \int_B \exp \rho A(x,b) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(A(x,b) - t)} q(\lambda) \widetilde{R_+F}(\lambda,b)\, d\lambda \right) db$$

dove $\widetilde{R_+F}(\lambda,b)$ denota la trasformata di Fourier della funzione $s \to R_+F(s,b)$

Dimostrazione. -

Si ha, per $f \in C_c^\infty(X)$

$$\int_B \exp \rho A(x,b) \left(\int_{\mathbb{R}} p(-\lambda) q(\lambda) \tilde{f}(\lambda,b) \exp(i\lambda A(x,b))\, d\lambda \right) db =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} p(-\lambda) q(\lambda) \left(\int_B \exp((\rho+i\lambda)A(x,b))\, \tilde{f}(\lambda,b)\, db \right) d\lambda = 0$$

siccome $\int_B \exp((\rho+i\lambda)A(x,b)) \tilde{f}(\lambda,b)\, db$ è una funzione pari di λ ([4]), mentre $p(-\lambda)q(\lambda)$ è una funzione dispari.

La formula (3) di inversione per la trasformata di Radon conclude la dimostrazione nel caso $t = 0$. In modo analogo si dimostra che $u_t(x,0) = f_2(x)$.

Per $t \neq 0$, si ha se $F \in C_c^\infty$

$$u(x,t) = c \int_{\mathbb{R}} q(\lambda) e^{-i\lambda t} \left(\int_B \exp((i\lambda+\rho)A(x,b)) \widetilde{R_+F}(\lambda,b)\, db \right) d\lambda$$

Ma $\int_B \exp((i\lambda+\rho)A(x,b)) \widetilde{R_+F}(\lambda,b)\, db$ è una autofunzione di L legata all'autovalore $-\lambda^2$ ([2]), da cui

$$Lu(x,t) = -c \int_{\mathbb{R}} q(\lambda) e^{-i\lambda t} \lambda^2 \left(\int_B \exp((i\lambda+\rho)A(x,b)) \widetilde{R_+F}(\lambda,b)\, db \right) d\lambda$$

$$= \partial_t^2 u(x,t).$$

Dunque, se $F \in C_c^\infty$, $u(x,t)$, data in formula (6), è la soluzione dell'equazio ne delle onde con dato iniziale F.

Consideriamo, per $F \in H$, la distribuzione su $\mathbb{R} \times M$:

$$(7)\quad u(x,t) = 1/2 \int_B \exp(\rho\, A(x,b))(Q_+F)(A(x,b)-t,b)db$$

dove $(Q_+F)(s,b)$ indica, per ogni b, la distribuzione temperata che è antitrasformata di Fourier della funzione

$$\lambda \to q(\lambda)\widetilde{R_+F}(\lambda,b).$$

Formula (7) dà una soluzione distribuzionale dell'equazione delle onde $Lu = u_{tt}$.

Dimostriamo ora che, per ogni b, la distribuzione temperata $Q_+F(s,b)$ ha supporto in $\mathbb{R}^+$ se e solo se $\operatorname{supp} R_+F \subset \mathbb{R}^+$.

Innanzitutto la distribuzione temperata $Q_+F(s,b)$ è,per ogni b, in qualche spazio di Sobolev $H^{-\mu}(\mathbb{R})$ ([8]).

Riportiamo qui il teorema di Paley-Wiener per gli spazi $H^{\mu}(\mathbb{R})$, ([8]), con $\mu \in \mathbb{Z}$:

sia k una distribuzione temperata appartenente ad $H^{\mu}(\mathbb{R})$.
Si ha:

$\operatorname{supp} k \subset R^+ \Longleftrightarrow \exists\, \Phi(z)$ olomorfa nel semipiano $\operatorname{Im} z = \eta < 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2+\eta^2)^{\mu}\, |\Phi(\xi+i\eta)|^2\, d\xi < C \qquad \forall \eta < 0$$

e che verifica l'una o l'altra delle seguenti condizioni

$$\int (1+\xi^2)^{\mu}\, |\Phi(\xi+i\eta)-\tilde{k}(\xi)|^2\, d\xi \to 0 \quad \text{se} \quad \eta < 0 \ \text{e} \quad \eta \to 0$$

o

$$\lim_{\eta<0\to 0} \Phi(\xi+ i\eta) = \tilde{k}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Sia $\operatorname{supp} R_+F \subset \mathbb{R}^+$ e sia Φ la sua trasformata di Fourier.

Allora $q(z)\Phi(z)$ è olomorfa in $\operatorname{Im} z < 0$ e si verificano facilmente le altre condizioni che garantiscono che $q(z)\Phi(z) = \Psi(z)$ è trasformata di Fourier di una distribuzione con supporto in $\mathbb{R}^+$; tale distribuzione è Q_+F.

Viceversa se supp $Q_+F \subset \mathbb{R}^+$ e $\Psi(z)$ è la sua trasformata di Fourier, allora $\Psi(z)/q(z) = \Phi(z)$ è la trasformata di Fourier di una distribuzione con supporto in R^+, che è ovviamente R_+F.

Definiamo ora il sottospazio outgoing $\mathcal{D}_+$ come <u>l'insieme di tutti i dati</u> $F \in H$ <u>tali per cui</u> $\forall t > 0, U(t)F(x)$ <u>si annulla per</u> $d(x,j) < t$.

Per provare che $\mathcal{D}_+$ è effettivamente lo spazio outgoing della trasformazione R_+, basta provare che $R_+\mathcal{D}_+ = L^2(\mathbb{R}^+)$.

a. $R_+\mathcal{D}_+ \supset L^2(\mathbb{R}^+)$.

Siano supp $R_+F \subset \mathbb{R}^+$ e $d(x,j) < t, t > 0$; allora sup $Q_+F \subset \mathbb{R}^+$ e, per ogni $b \in B$, $A(x,b) \leq d(x,j) < t$ pertanto $F \in \mathcal{D}_+$.

b. $R_+\mathcal{D}_+ \subset L^2(\mathbb{R}^+)$

Per dimostrare che, se $F \in \mathcal{D}_+$ allora supp $R_+F \subset \mathbb{R}^+$, abbiamo bisogno di una generalizzazione di teorema 3.8 di [5], (vedi nota (1)) .

Lemma. -(1) Sia k una distribuzione su $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ e sia

---

(1) La dimostrazione è esattamente come nel caso $n=3$ fino al calcolo delle radici di $P_h^*(\ ) = 0$. A questo punto dobbiamo sostituire in(8) $K(s,b)=e^{-\rho\mu(m)s}Y_h(b)$ $m=0,1,\ldots,h-1$ e ricordare l'epressione di ρ e di $\exp\rho A(x,b)$ per gli spazi iperbolici nella loro realizzazione come palla unitaria in $\mathbb{R}^n$:

(8) $\quad u(x,t) = 1/2 \int_B (\exp \rho A(x,b))\, k(A(x,b)-t,b)\,db$

i. $u(x,t) = 0 \ \forall\, x,t \iff$ le h-sime componenti armoniche sferiche di k sono della forma

$$\varepsilon.\ k_h(s) = \int k.Y_h(b)db = \Sigma\, k_{m,h}\, e^{-\mu(m)s\rho} \qquad 0 \le m \le h-1$$

$$\text{dove} \quad \mu(m) = \begin{cases} 1 + \dfrac{2m}{n-1} & \text{per gli spazi iperbolici reali} \\ 1 + \dfrac{2m}{n} & \text{per gli spazi iperbolici complessi} \\ 1 + \dfrac{m}{n+2} & \text{per gli spazi iperbolici quaternionici .} \end{cases}$$

ii. $u(x,t) = 0$ se $d(x,j) < t \iff$ vale ε per $s < 0$

iii. $u(x,t) = 0$ se $d(x,j) < -t \iff$ vale ε per $s > 0$

iv. $u(x,t) = 0$ se $d(x,j) < a - |t| \iff$ vale ε per $|s| < a$

Sia $F \in \mathcal{D}_+$ e applichiamo ii nel caso di $k = Q_+F$; poiché Q_+F è temperata si ottiene supp $Q_+F \subset \mathbb{R}^+$ e dunque supp $R_+F \subset \mathbb{R}^+$.

(Continuazione della nota di pag. 13.

ρ	$\exp \rho A(x,b)$	
$\frac{n-1}{2}$	$\left(\frac{(1-\lvert x\rvert^2}{(\lvert b-x\rvert^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$	caso reale
$\frac{n}{2}$	$\left(\frac{1-\lvert z\rvert^2}{\lvert 1-z\cdot\bar{b}\rvert^2}\right)^{\frac{n}{4}}$	caso complesso
$\frac{n+2}{2}$	$\left(\frac{1-\lvert z\rvert^2}{\lvert 1-z\cdot\bar{b}\rvert^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}$	caso quaternionico

Qui z e b denotano le coordinate complesse e quaternioniche di x e b nella palla unitaria.

La rappresentazione "incoming R_- si ottiene mediante riflessione rispetto ad s della funzione

$$-c^{\frac{1}{2}}\, \mathcal{P}(\partial_s(e^{\rho s}\,\hat{f}_1) + e^{\rho s}\,\hat{f}_2) \quad \text{se} \quad F = \{f_1, f_2\} \in C_c^\infty$$

e lo spazio incoming $\mathcal{D}'_-$ è l'insieme dei dati $F \in H$ tali per cui, $\forall t < 0$, $u(x,t) = 0$ se $d(x,j) < -t$.

Il principio di Huygens, che si enuncia nel modo seguente: se il dato iniziale $F = \{f_1, f_2\}$ è tale che $f_1(x) = f_2(x) = 0$ per ogni x per cui $d(x,j) > a$, allora $u(j,t) = 0$ per $|t| > a$ vale esclusivamente per gli spazi iperbolici reali di dimensione dispari.

Si ha ovviamente $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2 = 0$ per $|s| > a$ e, da (7)

$$u(j,t) = 1/2 \int_B (Q_+F)(-t,b)\,db.$$

Se M è uno spazio iperbolico reale di dimensione dispari, allora Q_+F è un operatore differenziale sulle trasformate di Radon $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2$ e quindi $Q_+F(-t,b) = 0$ per ogni $b \in B$ se $|t| > a$. Negli altri casi, il principio di Huygens non vale, infatti $u(j,t)$ è antitrasformata di Fourier di $q(-\lambda) \int_B \widetilde{R_+F}(-\lambda,b)\,db$. Essendo $u(j,t)$ a supporto compatto, $q(-\lambda) \int_B \widetilde{R_+F}(-\lambda,b)\,db$ si estende ad una funzione olomorfa intera. Ne segue che $q(\lambda)$ è olomorfa intera e ciò si verifica, per le limitazioni di $q(\lambda)$ date in sezione 2, solo quando $q(\lambda)$, e quindi $p(\lambda)$, è un polinomio.

5. LA MATRICE DELLO SCATTERING. -

Per ogni fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice dello scattering $\mathcal{S}$ è data da $\mathcal{S}(\lambda)$; $L^2(B) \longrightarrow L^2(B)$ dove $\mathcal{S}(\lambda)f = p(\lambda)(-\lambda\ \tilde{f}_1(-\lambda,b) + \tilde{f}_2(-\lambda,b))$ se f è data da $p(-\lambda)(\lambda\tilde{f}_1(\lambda,b) - \tilde{f}_2(\lambda,b))$