Nel caso degli spazi iperbolici reali, nella loro realizzazione come palla unitaria B^n con struttura riemanniana

$$ds^2 = (1 - \sum_1^n {}_i \, x_i^2)^{-2} (\sum_1^n {}_i dx_1^2)$$

il bordo è S^{n-1} con la misura usuale, mentre gli horocicli sono (n-1)-sfe re tangenti al bordo ed

$$A(x,b) = \log \left[(1-|x|^2)/|x-b|^2\right]^{(n-1)/2} \qquad ([2],\ p.\ 108)$$

e $\qquad \rho = \dfrac{n-1}{2}$

2. LA TRASFORMATA DI FOURIER.-

Sullo spazio simmetrico X si definisce la trasformata di Fourier per $f \in C_c^\infty(X)$ (C^∞ a supporto compatto) nel modo seguente

$$\tilde{f}(\lambda,b) = \int_X f(x) \exp\left[(-i\lambda + \rho)A(x,b)\right] dx$$

per $\lambda \in a^*$ e $b \in B$

e vale la seguente formula di inversione nel caso di rango 1

$$f(x) = 1/2 \int_{a^* x B} \tilde{f}(\lambda,b) \exp\left[(i\lambda+\rho)A(x,b)\right] |c(\lambda)|^{-2} d'\lambda\, db$$

dove $c(\lambda)$ ha le seguenti proprietà: $\overline{c(\lambda)} = c(-\lambda)$, $p(\lambda) = c(\lambda)^{-1}$ è analitica e del tipo $\lambda.q(\lambda)$, inoltre $c(\lambda)$ si estende come funzione meromorfa alla complessificazione di a^*.

L'espressione di $c(\lambda)$ in [2], p. 64, mostra che essa si scrive come un prodotto di fattori del tipo

$$\Gamma(a+i\xi)/\Gamma(b+i\xi)\ ^{(1)} \qquad \text{con } a,b > 0 .$$

Se Im $z < 0$, anche $c(z)$ ha una espressione del tipo sopra indicato e si verifica facilmente che in Im $z < 0$, $p(z) = c(z)^{-1}$ è limitata da un polinomio.

---

(1) Γ è la funzione Gamma.

L'applicazione $f \to \tilde{f}$ si estende ad una isometria tra $L^2(X)$ e $L^2(a^* x B)$, dove su $a^* x B$ si consideri la misura $1/2|c(\lambda)|^{-2} d\lambda\, db$.

3. LA TRASFORMATA DI RADON. -

La trasformata di Radon è definita, per $f \in C_c^\infty(X)$, nel modo seguente:

se $\xi = \xi(x,b)$ allora $\hat{f}(\xi) = \int_\xi f(x) ds(x)$

dove $ds(x)$ è l'elemento di volume indotto su ξ dalla struttura riemanniana di X.

Nel corso di questo lavoro, intenderemo però per trasformata di Radon di f, la funzione $\hat{f}$ definita su $a \times B$ da $\hat{f}(s,b) = \hat{f}(\xi)$ dove ξ è l'horociclo per b che ha distanza segnata s da j, ovvero $\xi=\xi(x,b)$ dove $A(x,b) = s$.

Si ha allora:

(1) $\tilde{f}(\lambda,b) = \int_a \hat{f}(x,b)\exp(-i\lambda+\rho)s)ds$ ([2],p. 93)

e

(2) $e^{\rho s}\int_B \hat{f}(s,b)db = e^{-\rho s}\int_B \hat{f}(-s,b)db$ ([3], p.680) .

Notiamo che, per ogni $b \in B$, la funzione della variabile reale λ

$$\tilde{f}(\lambda,b) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s,b)\, e^{(-i\lambda+\rho)s} ds$$

è la trasformata di Fourier della funzione della variabile reale s:

$$\hat{f}(s,b)e^{\rho s} .$$

E' facile verificare, dall'espressione di $\overline{p(\lambda)} = c(-\lambda)^{-1}$ (vedere 2), che l'operatore

$$(\mathcal{P}\, g)(s) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(\lambda)\overline{p(\lambda)}e^{i\lambda s} d\lambda$$