1. PRELIMINARI. -

Sia X uno spazio simmetrico riemanniano del tipo non-compatto e di rango 1. Sia $G = I_0(X)$ la componente connessa principale del gruppo delle isometrie di X e sia K il sottogruppo di isotropia nel punto $j \in X$. X è allora diffeomorfa a G/K e la sua struttura riemanniana proviene dalla forma di Killing dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G.

Sia dx la misura G-invariante su M.

Consideriamo la decomposizione e Cartan di $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \check{t} + p$$

dove $\check{t}$ è l'algebra di Lie di K; scegliamo un sottospazio massimale abeliano a di p (per ipotesi esso ha dimensione 1). Sia Λ^+ l'insieme delle radici ristrette positive di α, g_α l'autospazio associato ad α e sia

$$\rho = 1/2 \sum_{\alpha \in \Lambda^+} (\dim g_\alpha)\alpha$$

Con η indichiamo l'algebra di Lie nilpotente $\sum_{\alpha \in \Lambda^+} g_\alpha$ mentre $m = \{X \in \check{t} : [X,a] = 0\}$. Siano A, N e M i sottogruppi di G con algebre di Lie a, η e m rispettivamente. La forma di Killing induce misure euclidee su a e sul suo duale a^*: denoteremo queste misure moltiplicate per $1/\sqrt{2\pi}$ con $d's$ e $d'\lambda$ rispettivamente.

Lo spazio quoziente $B = K/M$ viene detto bordo di X e db sarà la misura K-invariante su B normalizzata da $\int_B db = 1$.

Un horociclo in X è un'orbita in X di un sottogruppo di G coniugato ad N. Indichiamo con $\xi(x,b)$ l'unico horociclo per b passante per x e con $a(x,b)$ l'unico elemento di A tale che $\xi(x,b) = ka.\xi_0$ dove $kM = b$ e $\xi_0 = N.j$. Sia inoltre $A(x,b) = \log a(x,b)$; $|A(x,b)|$ è allora la distanza di j da $\xi(x,b)$ ([4] , p. 136).

Nel caso degli spazi iperbolici reali, nella loro realizzazione come palla unitaria B^n con struttura riemanniana

$$ds^2 = (1 - \sum_1^n x_i^2)^{-2}(\sum_1^n dx_1^2)$$

il bordo è S^{n-1} con la misura usuale, mentre gli horocicli sono (n-1)-sfere tangenti al bordo ed

$$A(x,b) = \log [(1-|x|^2)/|x-b|^2]^{(n-1)/2} \qquad ([2], \text{ p. } 108)$$

e $$\rho = \frac{n-1}{2}$$

2. LA TRASFORMATA DI FOURIER.-

Sullo spazio simmetrico X si definisce la trasformata di Fourier per $f \in C_c^\infty(X)$ (C^∞ a supporto compatto) nel modo seguente

$$\tilde{f}(\lambda,b) = \int_X f(x) \exp[(-i\lambda + \rho)A(x,b)]\, dx$$

per $\lambda \in a^*$ e $b \in B$

e vale la seguente formula di inversione nel caso di rango 1

$$f(x) = 1/2 \int_{a^* x B} \tilde{f}(\lambda,b)\exp[(i\lambda+\rho)A(x,b)]|c(\lambda)|^{-2} d\lambda db$$

dove $c(\lambda)$ ha le seguenti proprietà: $\overline{c(\lambda)} = c(-\lambda)$, $p(\lambda) = c(\lambda)^{-1}$ è analitica e del tipo $\lambda.q(\lambda)$, inoltre $c(\lambda)$ si estende come funzione meromorfa alla complessificazione di a^*.

L'espressione di $c(\lambda)$ in [2], p. 64, mostra che essa si scrive come un prodotto di fattori del tipo

$$\Gamma(a+i\xi)/\Gamma(b+i\xi)^{(1)} \qquad \text{con } a,b > 0 .$$

Se Im $z < 0$, anche $c(z)$ ha una espressione del tipo sopra indicato e si verifica facilmente che in Im $z < 0$, $p(z) = c(z)^{-1}$ è limitata da un polinomio.

---

(1) Γ è la funzione Gamma.