

INTRODUZIONE ALLE TECNICHE DI SINTESI
DELLA MUSICA CON ELABORATORE

G. De Poli

C.S.C. - Istituto di Elettrotecnica e di Elettronica
Università di Padova

RIASSUNTO

Per produrre la musica con l'elaboratore si impiegano delle opportune tecniche di sintesi.

In questo lavoro prima vengono esaminate le tecniche di generazione del suono, eventualmente con parametri lentamente variabili nel tempo; poi quelli che trasformano un suono in modo lineare o non lineare. Per ciascun tipo sono presentati i metodi più diffusi e ne vengono discussi vantaggi e svantaggi, cercando di porre in evidenza le possibilità applicative.

INTRODUZIONE

Il suono è lo stimolo all'organo dell'udito prodotto da una vibrazione di particelle d'aria. Queste vibrazioni sono generalmente causate da un oggetto in movimento, la sorgente sonora; esse sono propagate attraverso un mezzo (aria) e possono comunicare informazioni all'ascoltatore. E' questo fatto che giustifica l'uso del termine segnale.

Non viene qui analizzato quando un suono diventa musica, nè la contrapposizione tradizionale tra suono e rumore, in quanto ciò dipende essenzialmente dall'atteggiamento dell'ascoltatore.

Una prima distinzione può essere fatta tra i suoni prodotti senza l'intervento umano, o meglio senza l'intervento volontario e cosciente dell'uomo, e quelli prodotti volontariamente dall'uomo, sia direttamente (voce) sia con opportuni strumenti. Il primo tipo è oggetto di studio di altre discipline, tra cui l'ecologia sonora. I suoni del secondo tipo possono essere ulteriormente distinti rispetto alla fonte di produzione. Abbiamo quindi i suoni di origine acustica e quelli di origine elettrica. Questi ultimi sono quelli che, per esistere, richiedono un altoparlante.

Anche se spesso non ci si pensa, la maggior parte della musica che ascoltiamo è di origine elettrica e sempre più raramente si ascolta musica senza l'intermediazione dell'elettricità. Tutti infatti ascoltano musica dalla radio, dai dischi, dalla televisione ed anche quando si va ad un concerto di musica non elettronica, sempre più spesso il suono viene amplificato elettricamente.

Ma la musica non solo viene riprodotta elettricamente, ma viene anche trasformata elettricamente. Basti pensare alle chitarre elettriche della musica pop che hanno completamente trasformato la musica leggera ed il modo d'ascolto. E' difficile pensare alla musica rock senza l'elettricità. Nel campo della musica colta, si pensi alla musica concreta.

Infine la musica viene anche generata elettricamente, ad esempio negli organi elettronici o nei sintetizzatori: non esiste all'origine nessun tipo di suono acustico. Un intero settore della musica contemporanea è sorto stimolato da questa possibilità: la musica elettronica.

Segnali discreti

Un segnale, e quindi un suono, può essere rappresentato come una funzione del tempo.

A seconda del dominio della funzione i segnali possono essere classificati in:

- segnali continui nel tempo: in cui la variabile indipendente assume tutti i valori in un insieme continuo (ad esempio intervallo di R^1 o tutto R^1);
- segnali discreti nel tempo: in cui la variabile indipendente assume soltanto valori in un insieme discreto (finito o numerabile). In tal caso si parla di sequenze o serie temporali.

Nelle applicazioni musicali generalmente gli istanti di tempo sono equispaziati. Se Z è l'insieme dei numeri interi con segno (relativi), per ogni numero reale T si introduce l'insieme

$$Z(T) = \{\dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots\} = \{nT : n \in Z\}$$

che verrà considerato l'asse dei tempi discreti con quanto temporale T . In seguito, anche se non specificato, si intende che il dominio delle funzioni del tempo sia $Z(T)$.

Analogamente, per quanto riguarda il codominio della funzione che rappresenta il segnale, si ha:

- segnale continuo in ampiezza in cui la variabile dipendente assume tutti i valori di un insieme continuo;
- segnale discreto in ampiezza (o quantizzato) in cui la variabile dipendente assume soltanto i valori in un insieme discreto, detto alfabeto.

A seconda del tipo di dominio e codominio si hanno quattro classi di segnali. Le più importanti sono i segnali continui nel tempo e in ampiezza detti analogici e quelli discreti nel tempo e in ampiezza detti numerici. Questi ultimi sono quindi rappresentati da sequenze di numeri.

Il calcolatore elabora numeri. Esso può quindi trattare questi segnali. Nella computer music si hanno segnali numerici corrispondenti a sequenze di numeri, detti campioni, rappresentati con un numero finito di cifre e corrispondenti all'ampiezza del segnale acustico in istanti equispaziati di tempo. Sebbene gli elaboratori trattino i segnali numerici, cioè discreti in tempo e ampiezza, la spiegazione delle tecniche di sintesi può essere fatta con riferimento ai segnali discreti nel tempo e non in ampiezza, in quanto, se si usa un numero sufficiente di cifre per rappresentare i numeri, può essere trascurato l'effetto della discretizzazione dell'ampiezza.

In generale la serie temporale, che si ottiene prelevando da un segnale continuo $s(t)$ dei valori in certi istanti t_n , perde parte dell'informazione affidata al segnale continuo. Tuttavia se gli istanti t_n di campionamento sono abba-

stanza fitti la serie temporale conserva esattamente l'informazione, nel senso che dalla serie temporale si può ricostruire esattamente il segnale continuo $s(t)$. Vale infatti il teorema del campionamento di Shannon che afferma: se una funzione $f(t)$ continua nel tempo non contiene componenti a frequenza superiore a B , essa è completamente definita dando le sue ordinate ad una serie di punti spazati T secondi tra loro, con $T = \frac{1}{2B}$.

Esiste quindi un'operazione (D/A), detta conversione numerico-analogica, che consente di costruire il segnale continuo, sotto forma di tensione elettrica, dalla serie temporale rappresentante il segnale discreto. Essa viene realizzata praticamente con un convertitore digitale analogico seguito da un filtro.

USI DELLE TECNICHE NUMERICHE

I suoni rappresentati sotto forma numerica fanno parte della categoria dei suoni di origine elettrica; infatti è necessario l'uso di un altoparlante per ascoltarli. L'uso di tecniche numeriche può essere diviso in tre categorie: riproduzione, trasformazione, generazione.

Nella prima categoria (fig. 1) i suoni vengono trasformati in segnale elet

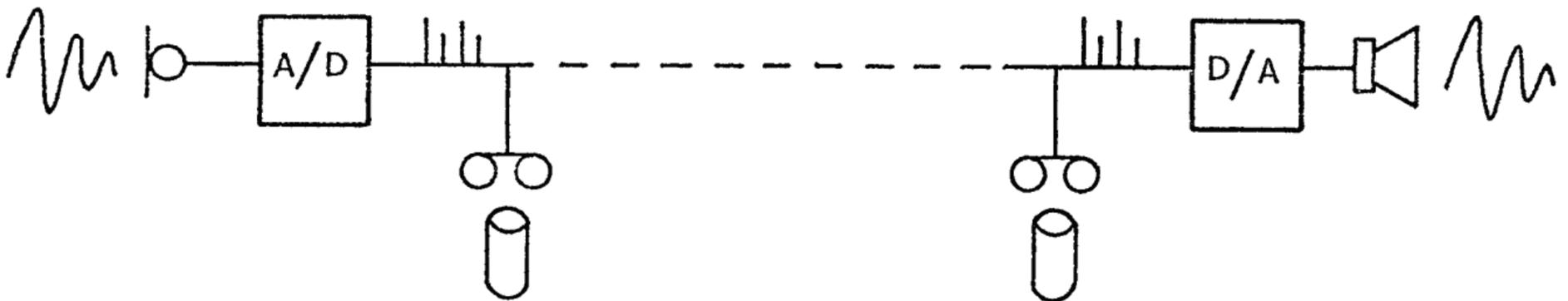


fig. 1

trico dal microfono e poi in sequenza di numeri dal convertitore A/D. Essi possono venir registrati sotto forma digitale su nastro o disco oppure trasmessi in un'altra località. Possono poi essere riprodotti con quanta fedeltà si vuole, se si è usata una frequenza di campionamento maggiore del doppio della banda del segnale e un numero sufficiente di cifre per rappresentare ogni numero. Già esistono studi di registrazione di questo tipo e conversazioni telefoniche sono trasmesse per via numerica.

Nella seconda categoria, modificazioni, non ci si limita a convertire un suono in sequenza di numeri. Si elabora con metodi numerici questa sequenza, trasformando le caratteristiche del suono (fig. 2).

I vantaggi rispetto alle tecniche analogiche sono l'assenza di rumore, la precisione e la disponibilità di tecniche di elaborazione del segnale non facil

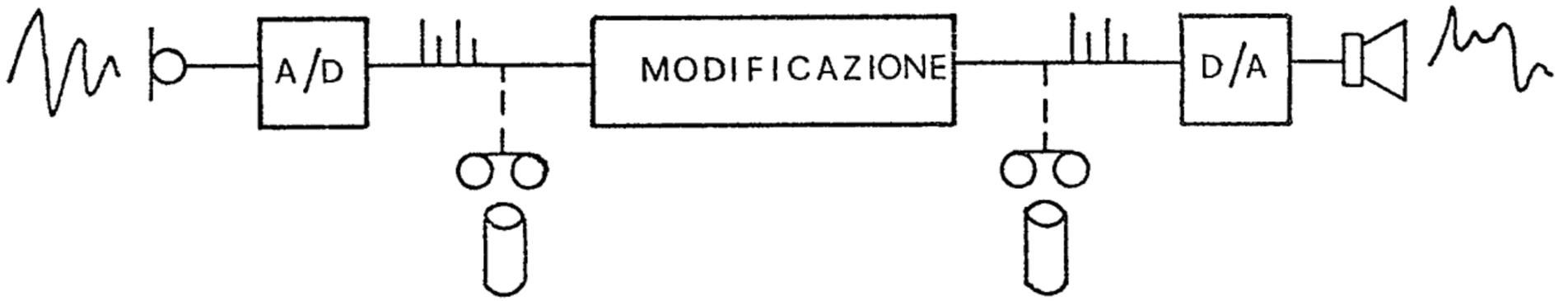


fig. 2

mente realizzabili in maniera analogica. La trasformazione può essere fatta sia sui campioni che rappresentano il segnale nel tempo (fig. 3a), sia analizzando il suono e quindi trasformando i parametri ricavati dall'analisi (fig. 3b). In questo caso si procede poi alla sintesi con i parametri modificati.

Nella terza categoria, generazione, non esiste più un segnale acustico all'origine; si passa direttamente alla sintesi, dopo aver assegnato i parametri. (fig. 4).



fig. 3a

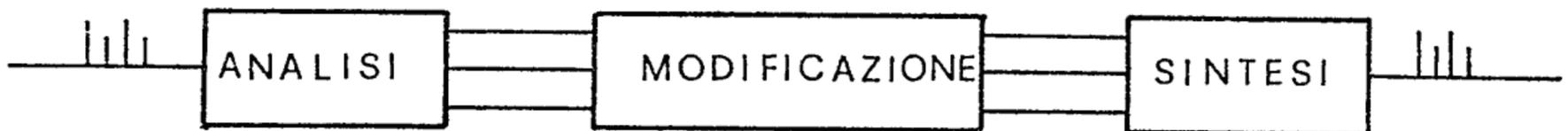


fig. 3b

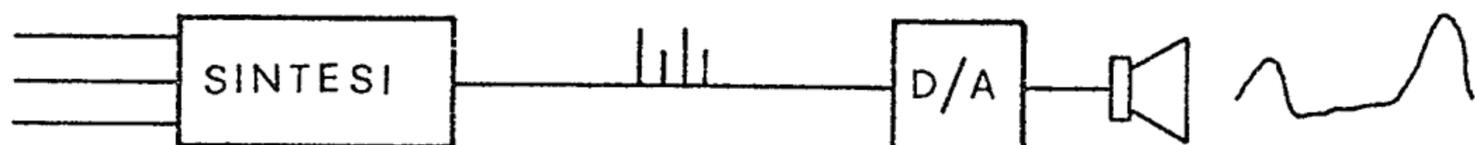


fig. 4

Per via sintetica, si possono produrre un'infinita varietà di nuovi suoni. Adottando particolari accorgimenti, si possono produrre varianti che vengono percepiti come "naturali".

Nel seguito si analizzeranno le tecniche di sintesi.

Tecniche di sintesi

Una tecnica di sintesi è il procedimento che consente di generare un suono. Nel caso di segnali numerici è una formula che consente di calcolare il valore dei campioni che rappresentano il suono. Ad esempio la formula

$$s(n) = \text{sen}(\omega nT)$$

descrive un segnale sinusoidale, essendo:

- s(n) l'ampiezza del campione al tempo nT;
- n il numero d'ordine del campione generato;
- T l'intervallo di tempo tra due campioni successivi;
- ω la pulsazione del suono in rad/sec.

L'unico parametro di questa formula è $\omega = 2\pi/f$, con f frequenza del segnale.

Una tecnica di sintesi è un modo di produrre un segnale campionato e può essere espressa come la valutazione di una formula matematica.

Questa espressione in genere ha vari parametri, è funzione di varie grandezze come ad esempio altezza ed intensità. Spesso si vuole che queste grandezze non siano costanti, ma varino con il tempo lungo la durata del suono. Ciò significa che alcuni parametri possono a loro volta essere funzioni del tempo. Essi vengono chiamati funzioni di controllo e variano molto più lentamente che il segnale generato (con banda <40 Hz). Se le funzioni di ingresso hanno circa la stessa banda del segnale in uscita, la tecnica di sintesi agisce come modificatore di un segnale.

Una tecnica di sintesi può così essere schematizzata come in figura 5.

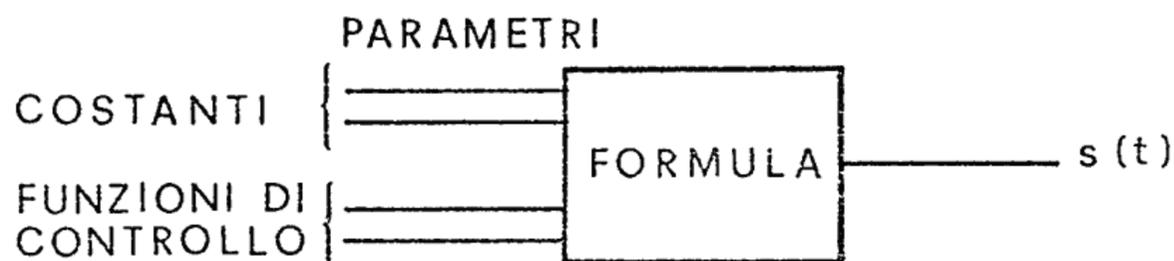


fig. 5

I parametri della sintesi possono essere forniti direttamente dal compositore mediante una partitura e/o con azioni su opportuni dispositivi di ingresso oppure derivare dall'analisi di suoni preesistenti.

La formula della tecnica di sintesi è un modello matematico della forma d'onda. Una tecnica sarà tanto più idonea per produrre un certo suono, quanto meglio il modello rappresenta il suono stesso e quanta più padronanza avrà il compositore nell'uso dei parametri.

La bontà del risultato dipende cioè sia dalla scelta del tipo di tecnica che dai parametri ad essa associati.

Nella musica tradizionale l'esecutore ha a disposizione una partitura e uno strumento. Egli legge le note ed agendo in modo opportuno sullo strumento produce il suono. Ad esempio se deve suonare un do con l'organo, sceglierà un registro e terrà premuto il tasto per tutta la durata del suono. Si hanno così due concetti fondamentali: lo strumento, che è il mezzo per produrre i suoni, e la nota, che è il simbolo scritto di un suono musicale.

Nella computer-music lo strumento è la tecnica di sintesi; la nota è l'insieme dei parametri che individuano il suono.

All'elaboratore va quindi fornita sia la descrizione della tecnica di sintesi che i parametri.

In generale il compositore può sia scegliere solo i parametri di una tecnica di sintesi predeterminata, che costruire la tecnica di sintesi più adatta alle sue esigenze.

Nel seguito vengono prima esaminate le tecniche di generazione del suono, eventualmente con i parametri variabili lentamente nel tempo. Verranno poi esaminate le trasformazioni lineari e non lineari. Per ciascun tipo verranno presentate le tecniche più importanti e discusse le possibilità applicative.

GENERAZIONE

Le tecniche di sintesi si dividono in due tipi: quelle che generano il suono e quelle che trasformano il suono. La differenza sta nel tipo di ingressi. Se questi hanno valore costante o lentamente variabile si parla di generazione, se invece l'ampiezza dell'ingresso varia rapidamente (è cioè un suono udibile) si parla di trasformazione.

La distinzione fra variazione lenta e rapida va fatta su basi psicoacustiche. Infatti i segnali con banda passante superiore a 20-40 Hz sono sentiti come suoni e vengono analizzati in frequenza dall'orecchio, trascurando, in prima approssimazione, la fase. I segnali di banda passante inferiore non sono

sentiti come suoni. Essi vengono analizzati nel tempo; in questo caso la fase ha molta importanza. Essi vengono percepiti solo se modificano (modulano) i parametri di un suono udibile e sono essi che portano la maggior parte dell'informazione musicale.

I due tipi di segnale possono essere prodotti e studiati con le stesse tecniche; è bene però tener sempre presente che vengono percepiti con due meccanismi diversi.

Sintesi granulare

Se le funzioni che descrivono la variazione lenta dei parametri sono, o possono essere pensate, discrete nel tempo, il suono così generato ha caratteristiche costanti a tratti. Esso può quindi essere pensato come una sequenza di suoni elementari di caratteristiche costanti. Questi suoni elementari vengono chiamati, nella computer music, grani, e la tecnica che usa questa possibilità, sintesi granulare. Questo tipo di sintesi è molto usato per la produzione della voce con l'elaboratore, dove i grani durano da 5 a 20 millisecondi. Nella musica finora è stata poco usata, ma, una volta superati alcuni problemi, probabilmente si affermerà.

Il primo problema è effettuare la transizione tra un grano e il successivo. Bisogna infatti evitare che un improvviso cambiamento di un parametro crei discontinuità di ampiezza o di fase nel segnale. Questo problema può essere risolto usando un opportuno inviluppo del grano e avendo cura di effettuare la transizione al momento opportuno e con particolari cautele.

Un secondo problema si presenta in quanto, dovendo fornire i parametri per ogni grano, si ha una grande quantità di dati da specificare. Mentre nella voce questi dati derivano generalmente dall'analisi, nella musica, in cui si vuole produrre suoni nuovi, bisogna inventare delle regole che producano risultati acusticamente validi. Devono quindi essere scritti dei programmi che producano questi dati e che tengano conto anche del problema della transizione cui sopra si accennava. Non va più fornita quindi solo una descrizione di una funzione del tempo, ma un programma che, eventualmente partendo da questa, generi la opportuna sequenza di parametri. Si noti che questo tipo di programma si avvicina di più, come obiettivi e metodi, ai programmi di aiuto alla composizione che alle tecniche di sintesi. Essi sono infatti dei veri e propri programmi di aiuto alla composizione del suono.

Sintesi mediante forma d'onda fissa

Il più semplice metodo di sintesi è quello a forma d'onda fissa. Esso serve per rappresentare i suoni periodici. I parametri di questo modello sono frequenza, ampiezza e forma d'onda. Esso viene rappresentato graficamente (fig. 6) con

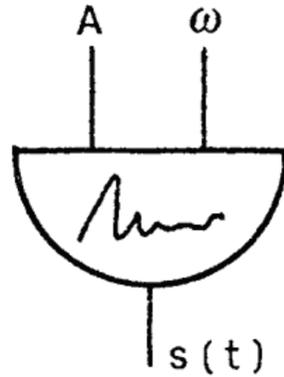


fig. 6

un oscillatore, che ripete con la frequenza specificata la forma d'onda. Nel disegno sono stati evidenziati i parametri ampiezza, pulsazione e forma d'onda.

Se la forma d'onda specificata $g(x)$ è considerata periodica con periodi uguali a 2π , l'espressione della formula è

$$s(t) = A g(\omega t) \quad \text{con} \quad \omega = 2\pi f \quad \text{e} \quad f \text{ è la frequenza del segnale}$$

Generalmente nei metodi di sintesi numerica viene specificato un periodo della forma d'onda sotto forma di tabella contenente le ordinate in punti equispaziati. Il valore della funzione in ogni istante viene poi ricavato con interpolazione di ordine zero (più spesso) o del primo ordine (talvolta).

Il segnale $s(t)$ è periodico e può essere rappresentato con la serie di Fourier

$$s(t) = \sum c_k \cos(k\omega t + \phi_k)$$

essendo

- $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ - pulsazione del segnale, T periodo del segnale,
- c_k e ϕ_k - ampiezza in modulo e fase delle singole componenti (armoniche) in cui può pensarsi scomposto il suono, che descrivono quindi la forma d'onda.

E' bene far notare che la serie di Fourier non è l'unica scomposizione possibile di un segnale periodico, ma quella che finora si è rivelata più utile.

Si noti che per i segnali numerici il fatto che il segnale sia periodico non

vuol dire che si ripetano sempre le stesse sequenze di numeri per ogni periodo. Ciò si verifica soltanto se il periodo del segnale T' è multiplo del periodo di campionamento T . I campioni avranno una periodicità solo se il rapporto tra T'/T è un numero razionale. In questo caso il periodo della sequenza numerica sarà il minimo comune multiplo tra i due periodi.

I risultati di questa tecnica non sono particolarmente soddisfacenti, in quanto il suono non ha nessuna variazione nel corso della sua durata.

Una prima variazione di questo modello consiste nel moltiplicare la forma d'onda per un fattore di scala che varia nel tempo: parte da zero, raggiunge il massimo dopo un certo tempo (attacco) e dopo una certa evoluzione raggiunge di nuovo lo zero (decadimento). Questa funzione viene chiamata involuppo. Il modello sarà quindi a forma d'onda fissa con involuppo. L'espressione matematica

$$s(t) = A(t) \cdot g(\omega t) = A(t) \cdot \sum c_k \cos(k\omega t + \phi_k)$$

viene rappresentata graficamente come in fig. 7.

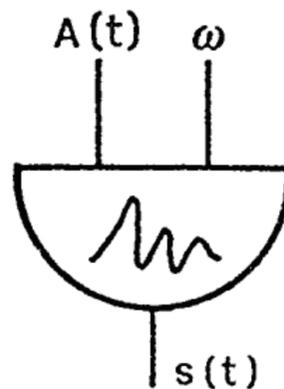


fig. 7

Può venire rappresentata anche come in figura 8 in cui si è evidenziato che l'involuppo può essere generato da un oscillatore a frequenza molto bassa pari all'inverso della durata del suono.

Una seconda variazione consiste nel rendere lentamente variabile la frequenza del suono. L'espressione è

$$s(t) = \sum_{k=1}^M c_k \cos(k \omega(t) \cdot t + \phi_k)$$

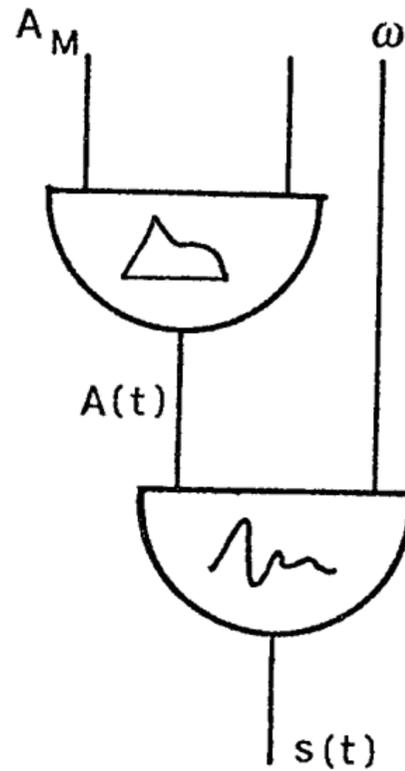


fig. 8

Questo metodo serve per creare l'effetto di tremolo nonchè i glissandi. Le rappresentazioni grafiche sono illustrate in fig. 9.

Queste due variazioni possono essere combinate insieme dando luogo al metodo di sintesi a forma d'onda fissa con ampiezza e frequenza lentamente variabili nel tempo. Esso viene utilmente usato per produrre i suoni quasi periodici.

La formula finale è quindi

$$s(t) = A(t) \cdot \sum_{k=1}^M c_k \cos(k \omega(t) \cdot t + \phi_k)$$

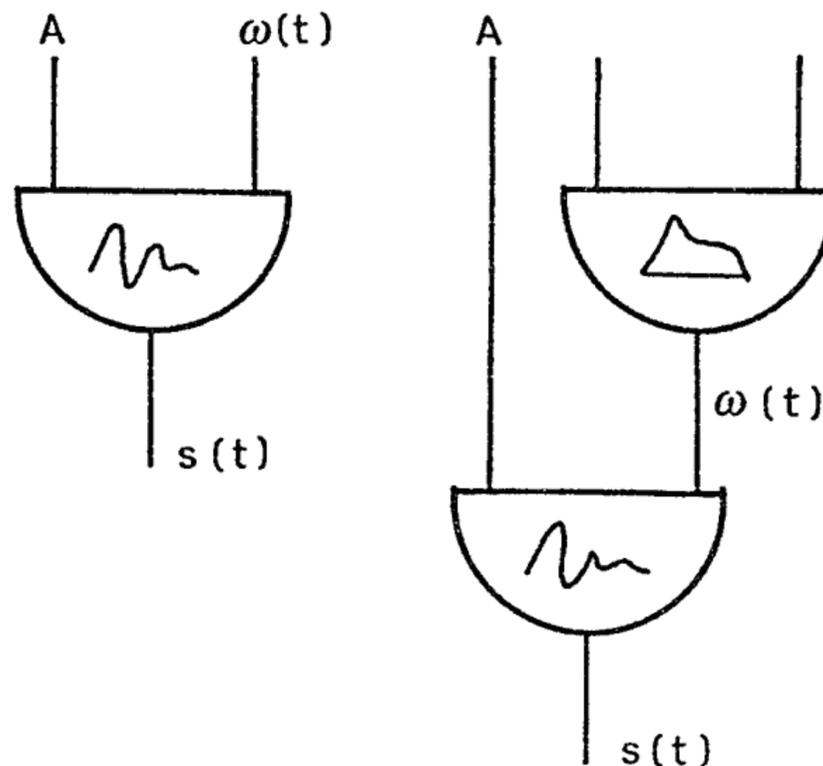


fig. 9

e viene rappresentata graficamente come in fig. 10.

In definitiva la forma d'onda è fissa mentre cambia l'ampiezza e la frequenza.

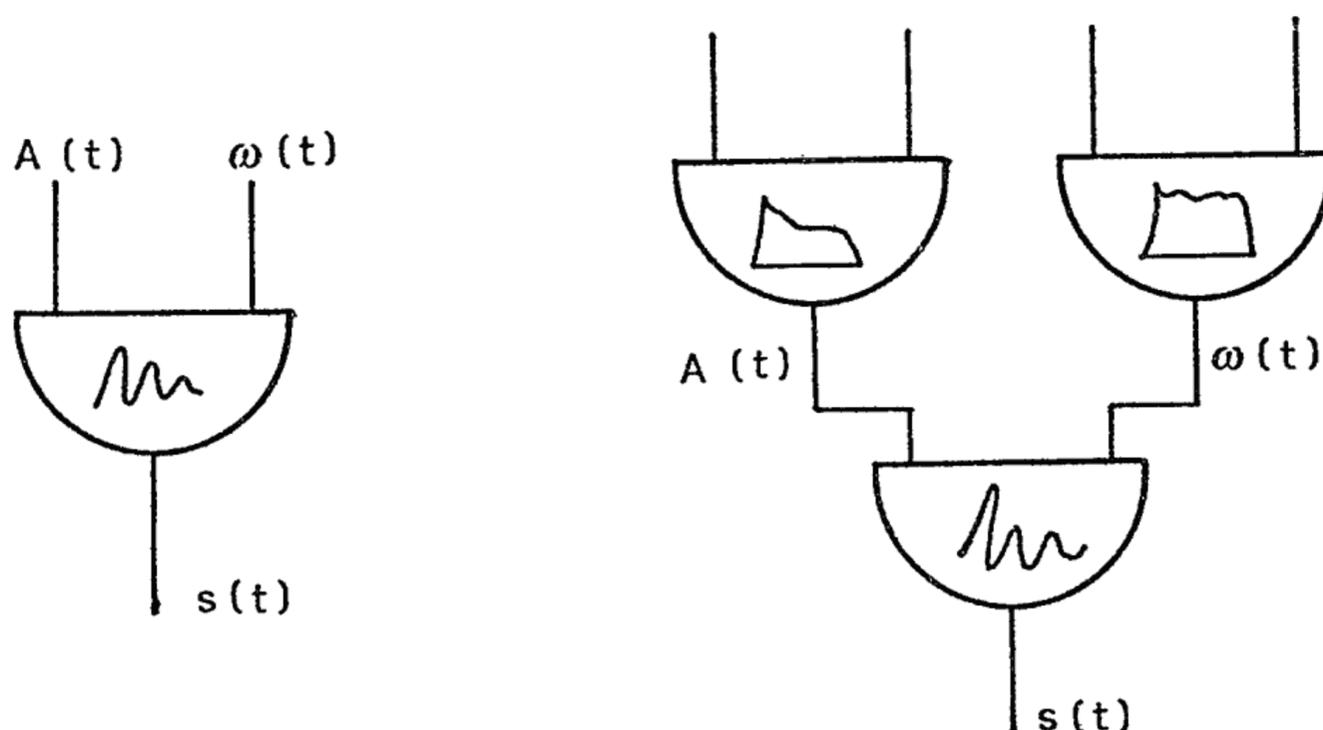


fig. 10

Sintesi additiva

L'idea della sintesi additiva è che si può produrre un suono più complesso mediante la sovrapposizione di più suoni semplici. In opportune condizioni i suoni componenti si fondono e il suono risultante viene percepito come unico. Questo procedimento è già usato negli strumenti tradizionali. Ad esempio nel piano alla maggior parte delle note corrispondono due o tre corde che oscillano a frequenza lievemente diversa. Negli organi l'esecutore può accoppiare ad una tastiera contemporaneamente quanti registri vuole, le cui frequenze sono multiple o sottomultiple di quella suonata; cambiando i registri selezionati cambia la qualità del suono. Nell'orchestra poi una stessa nota viene spesso eseguita contemporaneamente da strumenti diversi.

In genere non si ricorre alla sintesi additiva per produrre un suono periodico. In questo caso basta la sintesi a forma d'onda fissa. La sintesi additiva viene usata, per i suoni periodici, solo quando non si hanno a disposizione oscillatori con la forma d'onda voluta. Negli oscillatori digitali normalmente la forma d'onda viene memorizzata in una tabella e quindi può essere qualsiasi.

Normalmente questa tecnica viene utilizzata per produrre suoni quasi periodici. In questo caso l'ampiezza delle singole componenti varia nel tempo (lentamente) con legge diversa.

Un suono quasi periodico può essere pensato (e analizzato) come una somma di armoniche, di frequenza multipla della fondamentale, che si evolvono nel tempo. Ciò corrisponde alla formula

$$s(t) = \sum_{k=1}^M A_k(t) \cdot \cos(k\omega t + \phi_k)$$

Si confronti con la sintesi per forma d'onda fissa con inviluppo

$$s(t) = A(t) \cdot \sum c_k \cos(k\omega t + \phi_k)$$

Si osservi che ciascun addendo della sommatoria corrisponde ad una forma d'onda fissa (coseno) con il suo inviluppo, tecnica di sintesi già esaminata. La sintesi additiva sarà quindi rappresentata graficamente come in fig. 11.

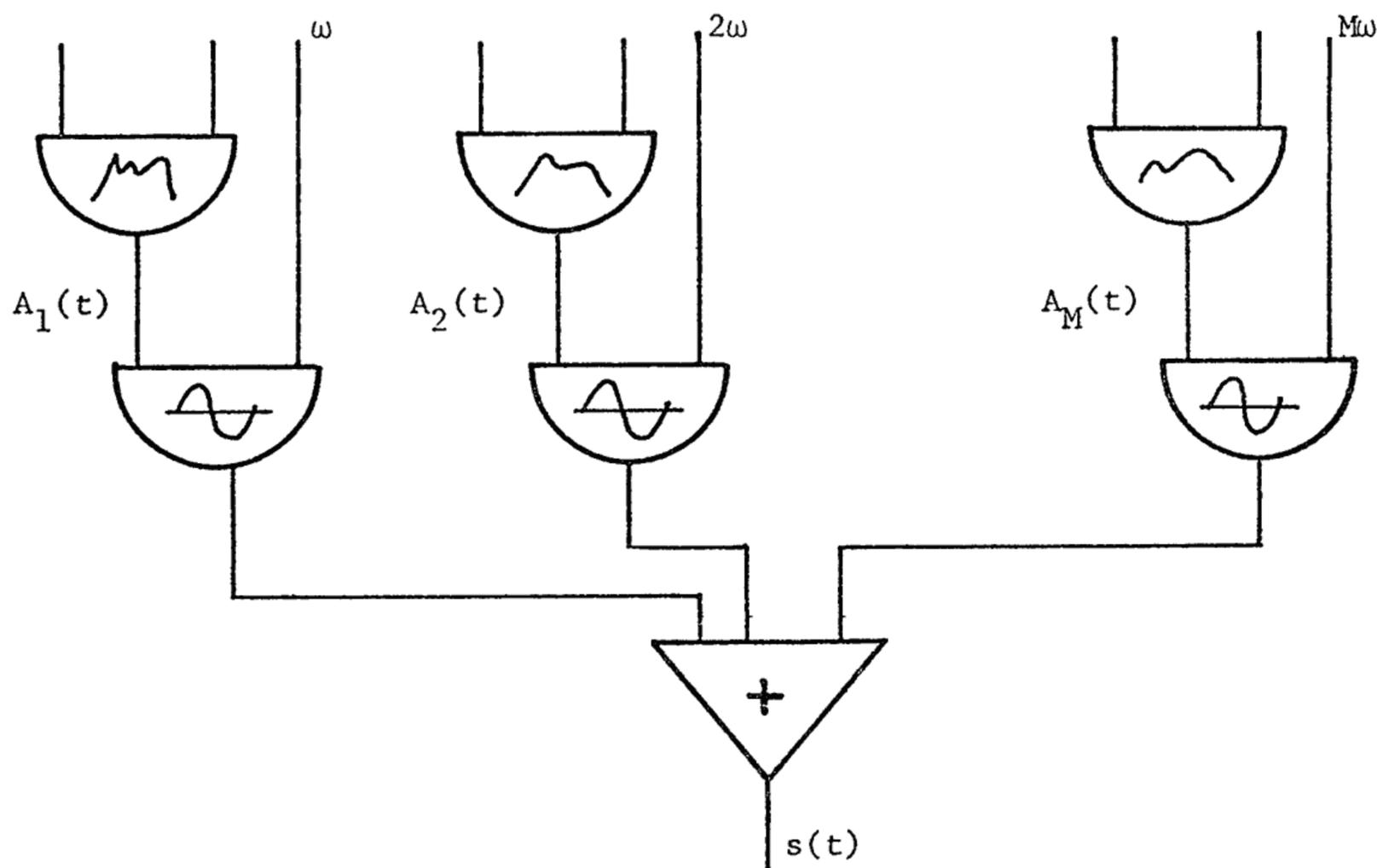


fig. 11

Se alcune componenti hanno inviluppo uguale o proporzionale, invece di sommare le componenti per tutta la durata della nota, possono essere sommate le forme d'onda, utilizzando quindi un unico inviluppo e la forma d'onda risultante.

Si può pensare che anche la frequenza di ogni componente sia lentamente variabile. La formula matematica è

$$s(t) = \sum_{k=1}^M A_k(t) \cos [(k\omega_o + \bar{\omega}_k(t)) \cdot t + \phi_k]$$

$$= \sum_{k=1}^M A_k(t) \cos [(\omega_k(t)) t + \phi_k]$$

essendo $\omega_k(t)$ la pulsazione della k-esima componente = $k\omega_o + \bar{\omega}_k(t)$
 ω_o la fondamentale
 $\bar{\omega}_k(t)$ la deviazione di pulsazione dell'armonica k-esima.

La rappresentazione grafica in generale è indicata in fig. 12. Ogni singolo addendo può essere rappresentato come in fig. 10 o come in fig. 13, usando la deviazione di pulsazione.

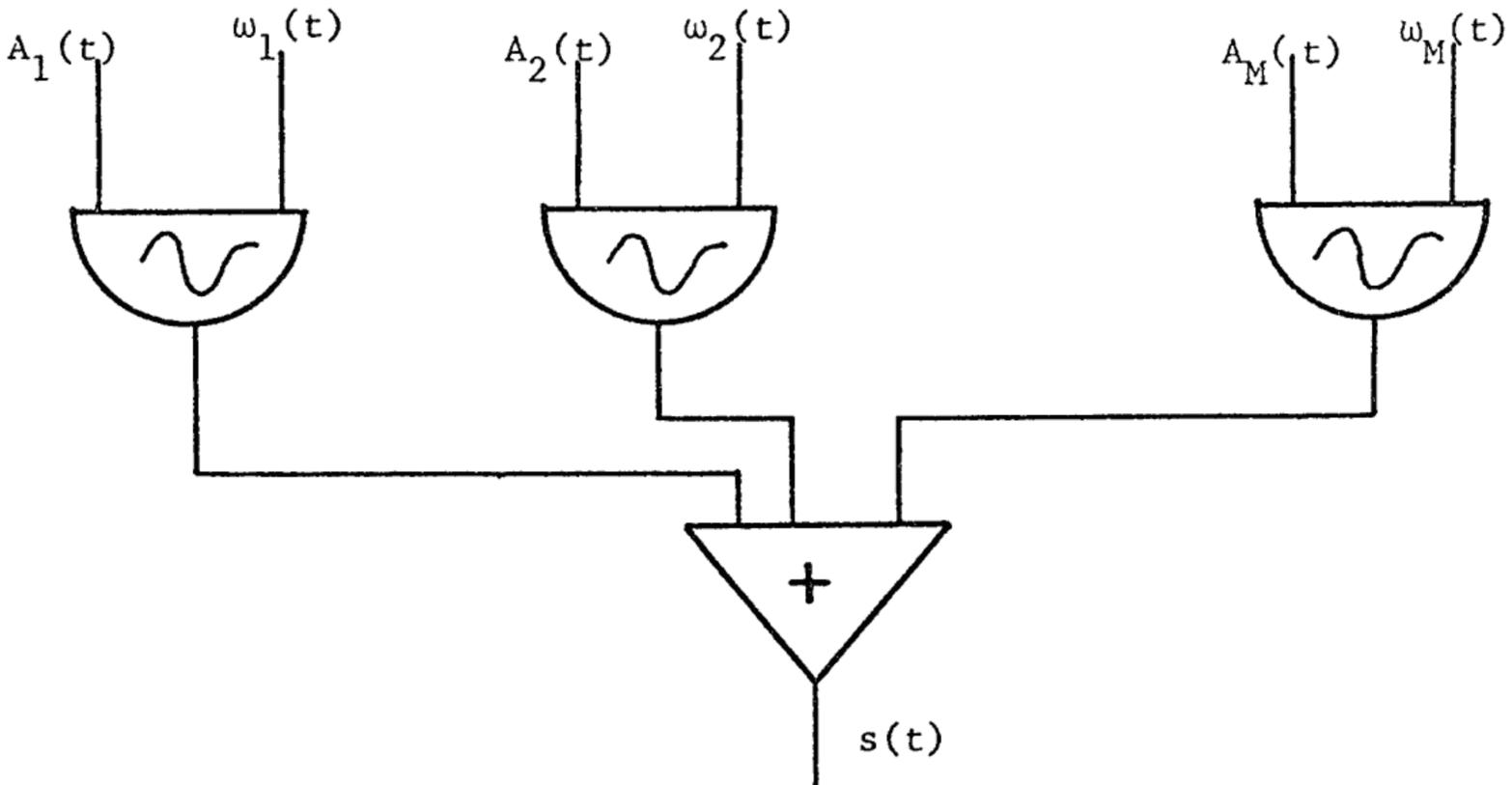


fig. 12

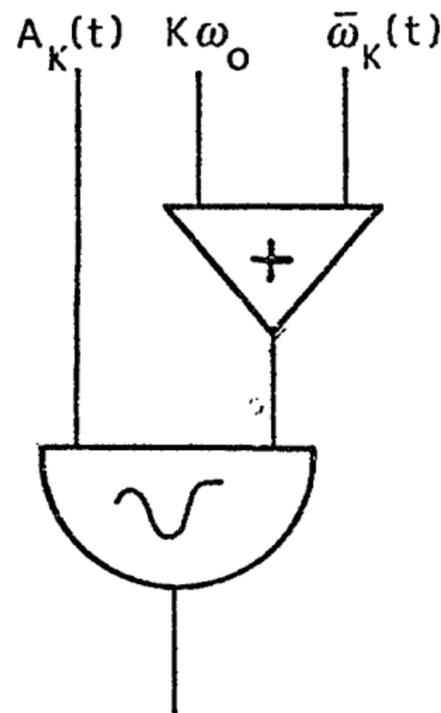


fig. 13

Per analizzare i suoni quasi periodici in termini di questi modelli esistono delle collaudate tecniche di analisi e sono pubblicati molti esempi di suoni strumentali. Ciò può suggerire dei criteri per la scelta delle funzioni di controllo.

Il problema che si pone nell'uso di questa tecnica è la grande quantità di dati che bisogna fornire per una singola nota; bisogna infatti specificare due funzioni di controllo per ogni componente e normalmente le funzioni variano da suono a suono, dipendono dalla durata, dall'intensità ecc.

Questa tecnica si applica utilmente anche ai suoni non periodici, se possono essere pensati come un insieme di oscillazioni non armonicamente legate tra loro. La formula generale è

$$s(t) = \sum A_k(t) \cos [(\omega_k(t))t + \phi_k]$$

essendo $\omega_k(t)$ lentamente variabile nel tempo.

Oscillatore VOSIM

Finora abbiamo visto oscillatori che riproducono periodicamente una forma d'onda assegnata, con la frequenza specificata come parametro. Essi fanno essenzialmente riferimento al modello di rappresentazione mediante analisi di Fourier sincrona con il periodo. E' infatti in base a questo modello che vengono scelti i parametri.

Esistono però altri tipi di oscillatori che fanno riferimento ad altri modelli. Il più importante nelle applicazioni musicali è il VOSIM.

L'oscillatore VOSIM (VOice SIMulation) viene ideato nell'ambito di un progetto di analisi dei segnali acustici nel dominio del tempo e di sviluppo di un modello con cui sia possibile descrivere e generare i suoni base dei linguaggi indo-europei.

La forma d'onda consiste in una serie di N impulsi sen^2 , di uguale durata T , di ampiezza decrescente, seguiti da una pausa M . L'ampiezza di ogni impulso sen^2 è inferiore a quella dell'impulso precedente di un fattore costante b . In fig. 14 è rappresentata la forma d'onda con $N=8$, $b=0.85$, $T=10\text{ms}$.

Lo spettro del segnale non ripetuto, vale:

$$|S(\omega)| = \frac{\text{sen} \frac{\pi\omega}{\Omega}}{\omega \left(\frac{\omega}{\Omega} - 1 \right)} \sqrt{\frac{1 - 2b^N \cos^2 \pi N \frac{\omega}{\Omega} + b^{2N}}{1 - 2b \cos^2 \pi \frac{\omega}{\Omega} + b^2}}$$

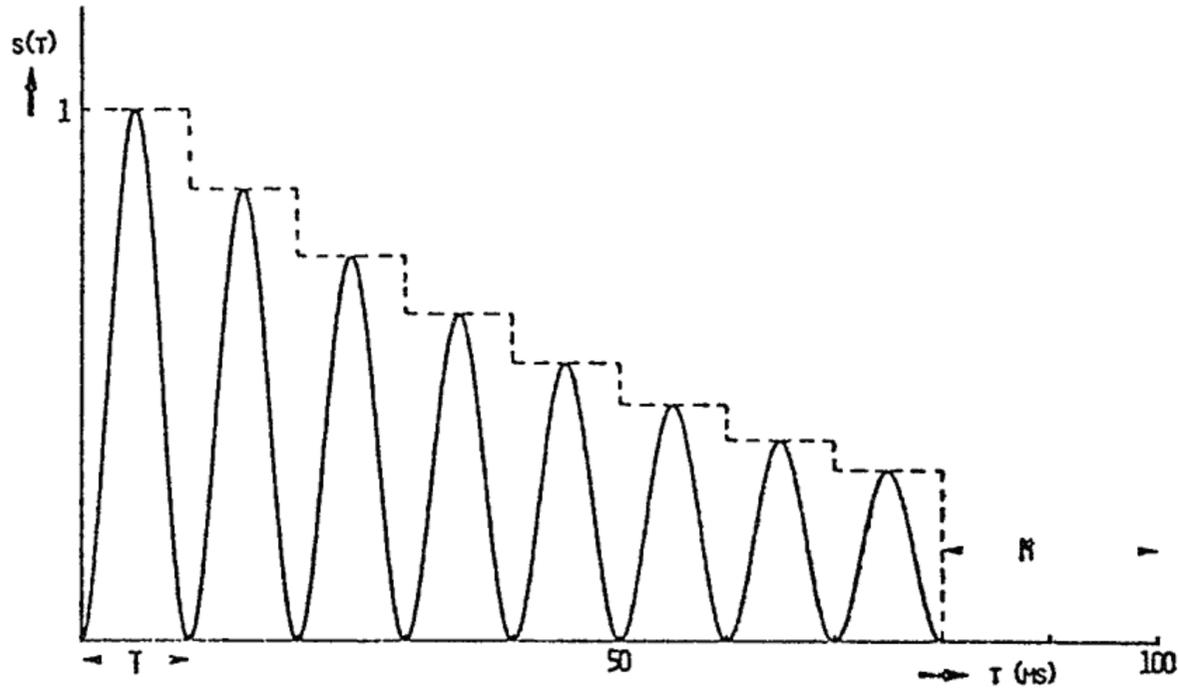


fig. 14

avendo posto $\Omega = \frac{2\pi}{T}$

In fig. 15 è rappresentato lo spettro della forma d'onda di fig. 14. Esso può essere pensato come il prodotto del termine, S_1 , fuori radice, e del termine S_2 costituito dalla radice. Il termine S_1 ha un andamento del tipo $\text{sen } x/x^3$ e non dipende da b nè da N (fig. 16) e si annulla per ω uguale a 2Ω , 3Ω , 4Ω ecc. Il termine S_2 è periodico con periodo Ω e simmetrico rispetto $\Omega/2$. Esso dipende dai valori di b : per $b=0$ il suo valore è costante, per b crescente da 0 ad 1 la sua parte centrale diminuisce via via di ampiezza mentre aumentano i valori la-

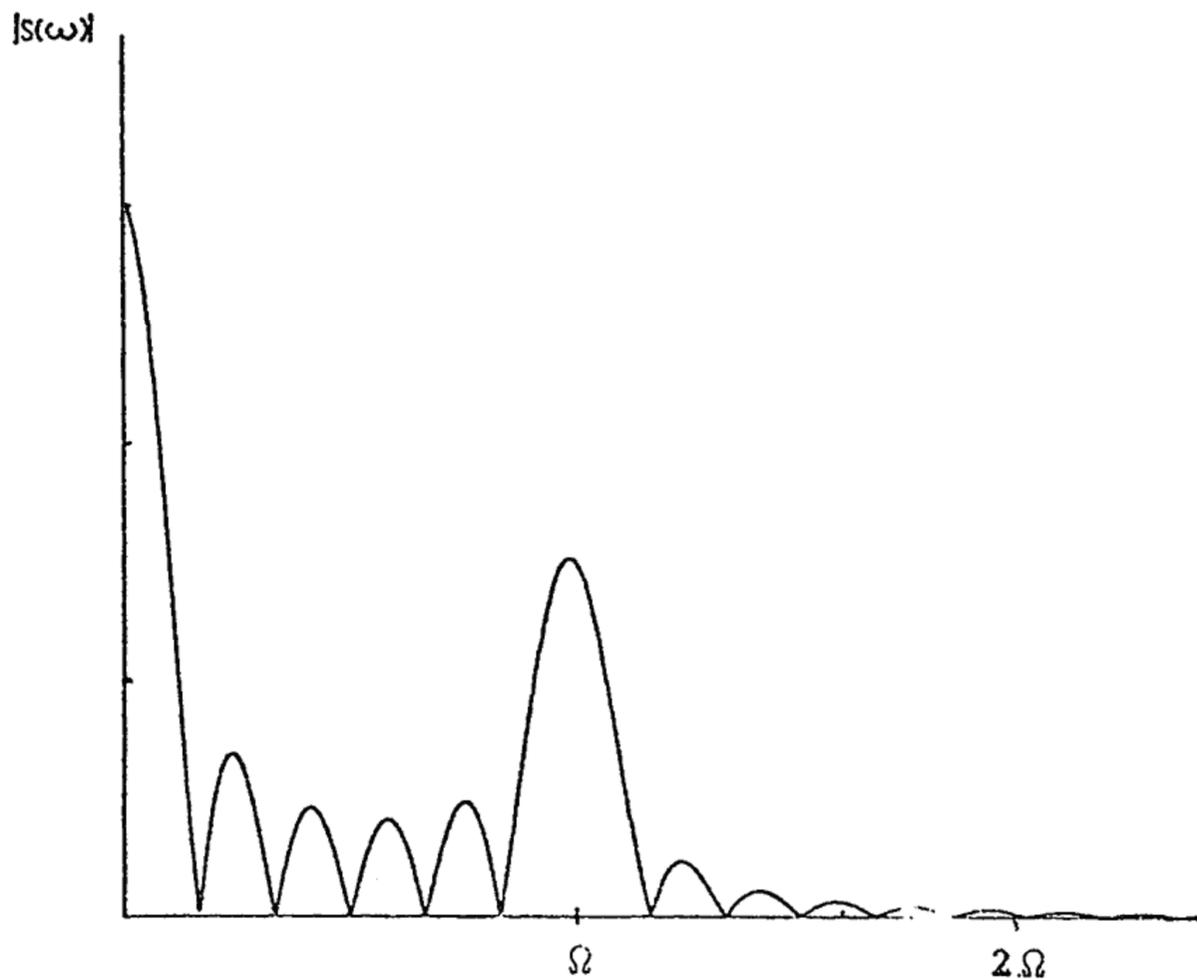


fig. 15

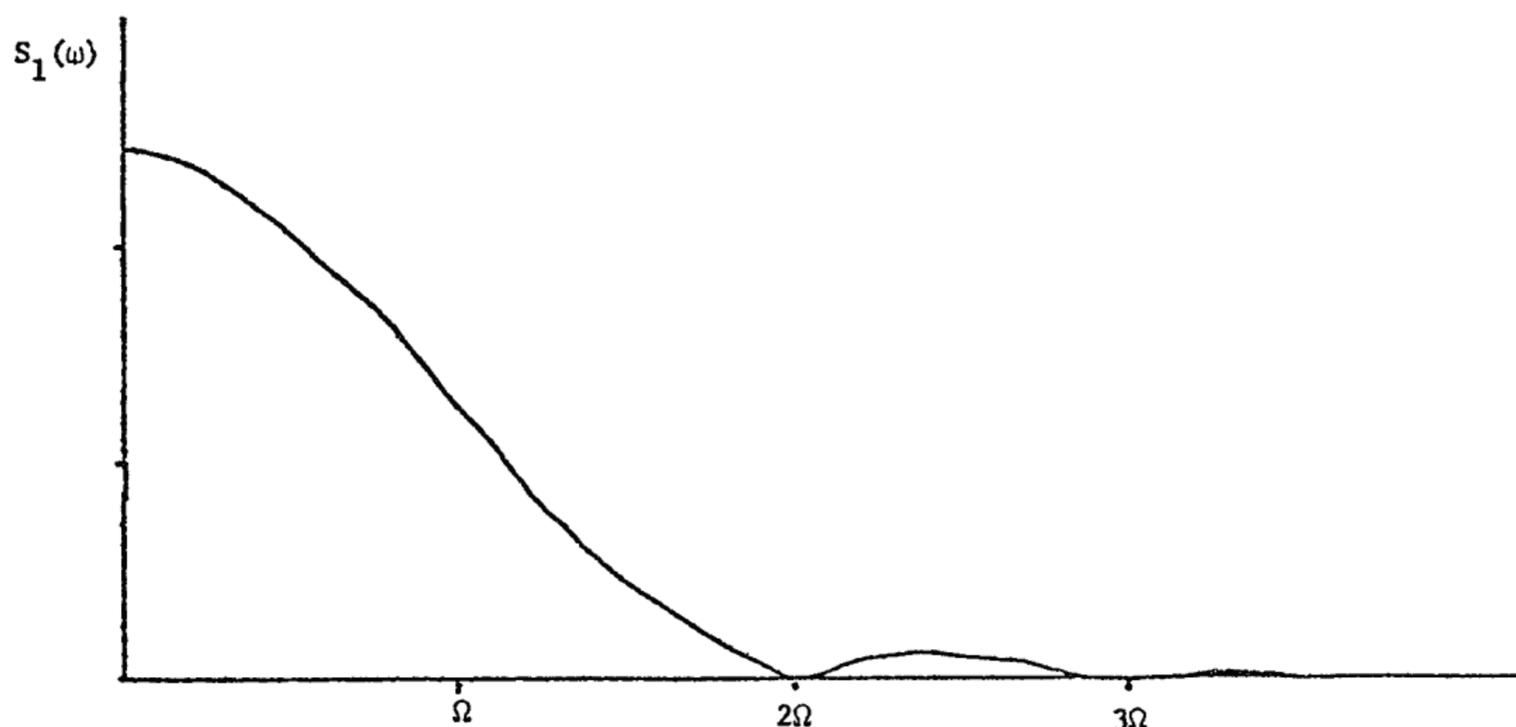


fig. 16

terali. In fig. 17 è rappresentato $|S_2(\omega)|$ per $b=0.8$ e $N=5$. Per $b > 1$, l'ampiezza nel tempo degli impulsi sen^2 è crescente. Invertendo la direzione dell'asse dei tempi si ottiene un segnale con $b' = 1/b$ e con ampiezza aumentata di un fattore b^{N-1} rispetto al precedente. Quindi lo spettro dei due segnali differisce solo per questo fattore moltiplicativo, ma non per la forma. Per b negativo la parte centrale di S_2 cresce quando b si avvicina a -1 , mentre calano i valori agli estremi cioè per $\omega=0$ e $\omega=\Omega$. La zona del formante è quindi in corrispondenza di $\omega=\Omega/2$ ed è più larga che nel caso precedente.

Si osservi che considerando b negativo, equivale ad avere gli impulsi alternati di segno (fig. 18), per cui la componente continua si attenua di molto, fino a sparire per $b=-1$ e N pari. Viene messa in evidenza una forte periodicità a metà frequenza rispetto al caso con b positivo. E' questo effetto che determina lo spostamento del formante.

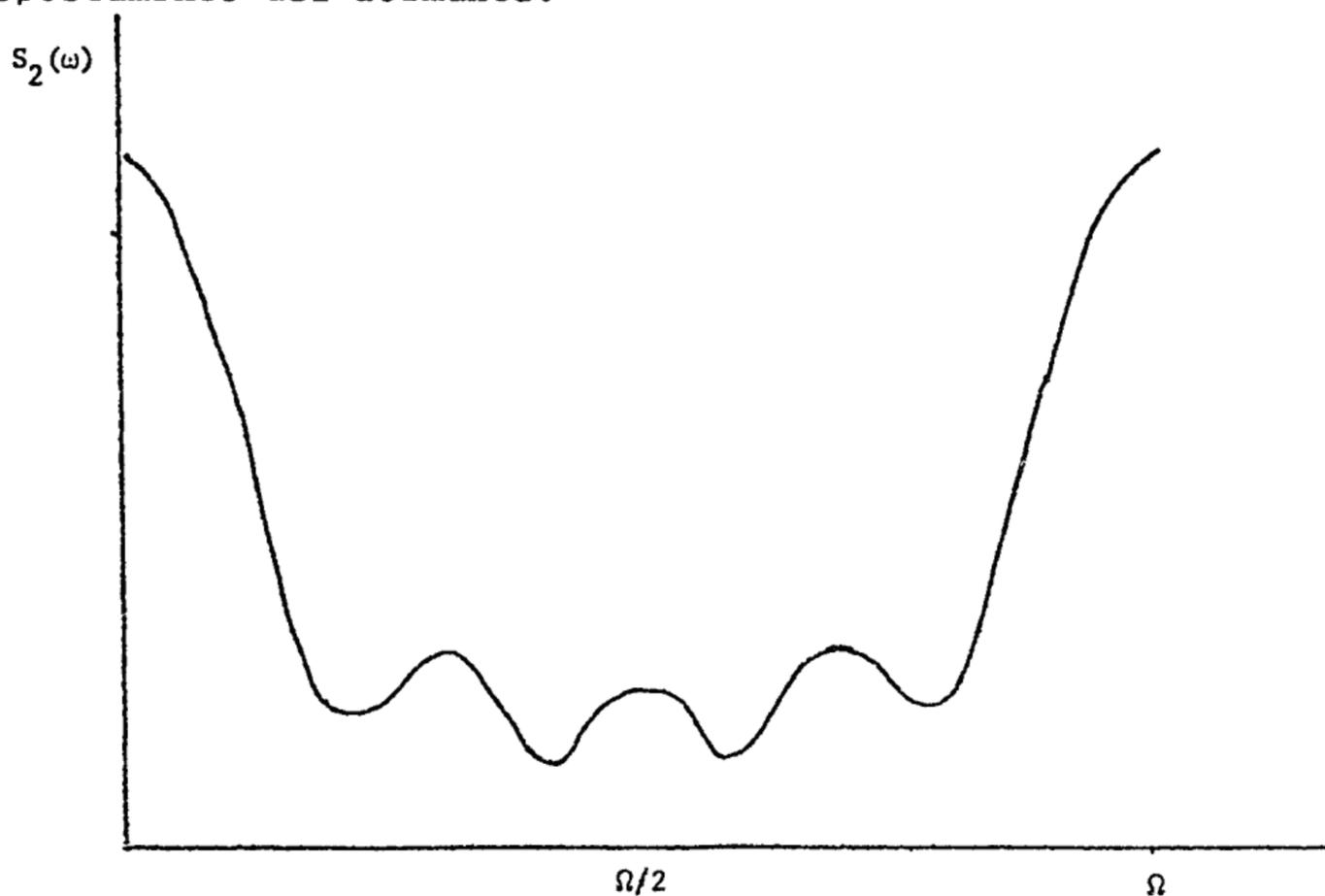


fig. 17

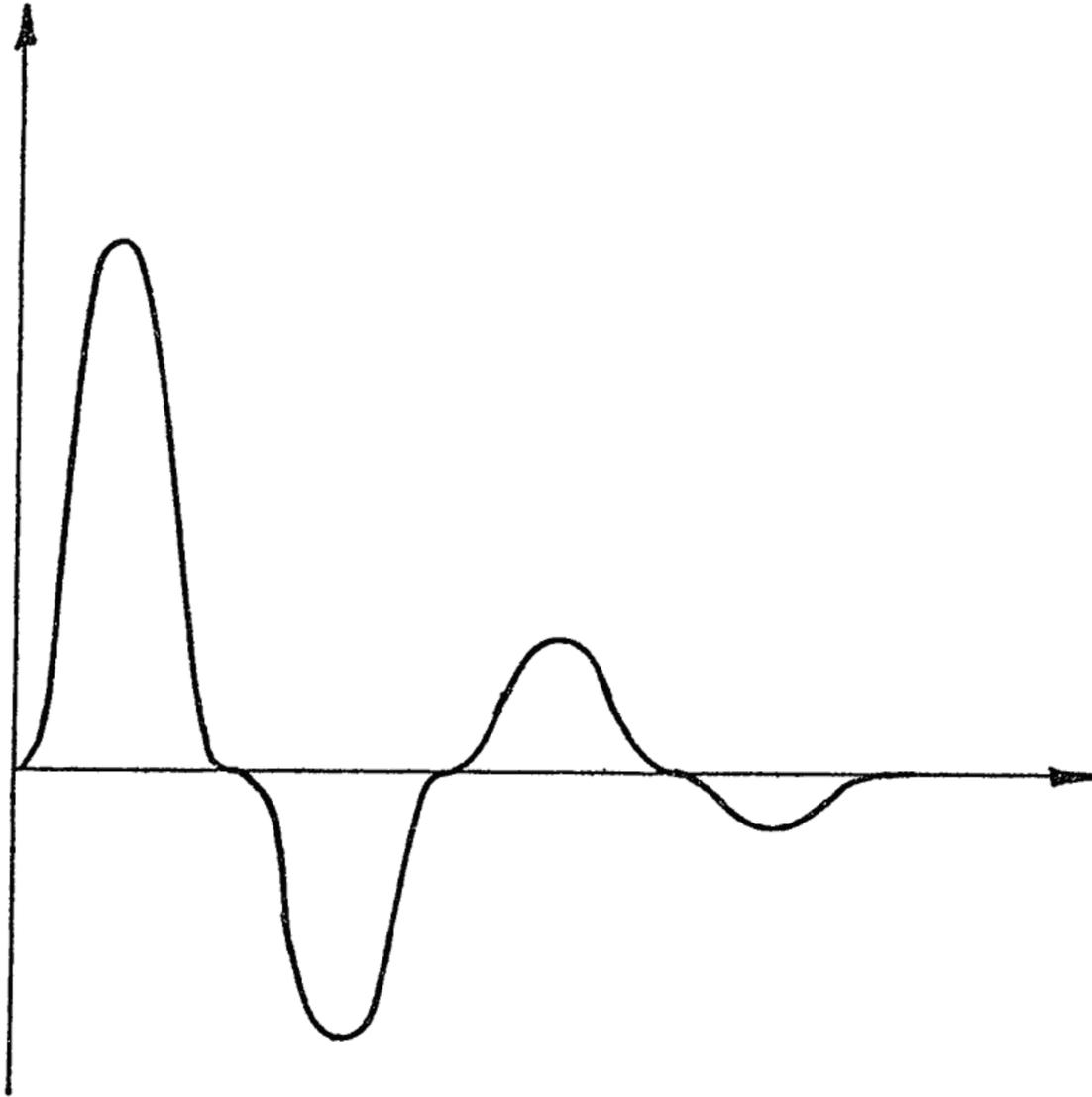


fig. 18

L'influenza del numero N di impulsi consiste nel produrre N oscillazioni in S_2 tra 0 e Ω , maggiormente evidenti per valori di b prossimi a 1 o -1 . Si osservi che per valori di b piccoli non ha senso aumentare di molto N in quanto l'ampiezza di ogni impulso decresce del fattore b e quindi si attenua rapidamente. Oltre ad un certo numero si avrebbero impulsi di ampiezza insignificante.

In conclusione le componenti superiori a 2Ω possono venir trascurate; lo spettro presenta una forte componente in continua e un picco in prossimità di Ω per b positivo e $\Omega/2$ per b negativo quando il segnale viene ripetuto periodicamente, con pulsazione ω_0 , lo spettro diventa discreto e il suo inviluppo è dato da $S(\omega)$. Il segnale presenta un formante in prossimità di Ω o $\Omega/2$ e questo lo rende utile per produrre molti suoni musicali, che presentano questa caratteristica.

Ponendo $T' = N \cdot T + M$ periodo del segnale e $\alpha = T'/T$ rapporto tra il periodo del segnale e durata del singolo impulso, risulta anche $\alpha = \Omega/\omega_0$; cioè α indica il numero d'ordine dell'armonica che individua il formante per b positivo, e il doppio del numero d'ordine per b negativo. La banda del segnale è, come visto, circa 2Ω , per cui le armoniche significative sono 2α .

Variando quindi α , la posizione del formante si sposta e variano anche con continuità, ma non nello stesso senso, le ampiezze relative di tutte le armoni-

che, seguendo l'involuppo descritto da $S(\omega)$. E' questa propriet , oltre alla presenza del formante, che rende l'oscillatore VOSIM efficace nelle applicazioni musicali, in cui le caratteristiche del suono devono essere variabili. L'uso di pi  oscillatori sincronizzati consente di produrre suoni molto diversi, compresi i principali fonemi delle lingue europee.

Segnali aleatori

Finora sono stati considerati segnali in cui si   supposto di conoscere perfettamente l'andamento in ogni istante; essi vengono chiamati segnali determinati. Accanto ad essi si considerano i segnali aleatori quando l'andamento non   noto, od   noto solo in parte. Si conoscono soltanto alcune caratteristiche medie, dette propriet  statistiche.

Si noti che la distinzione non riguarda l'andamento del segnale, ma soltanto il punto di vista. Le propriet  statistiche sono caratteristiche di una classe di segnali e non di un singolo segnale. Un insieme di segnali aleatori viene rappresentato mediante un processo aleatorio.

Esistono negli elaboratori particolari procedimenti che simulano un processo aleatorio, producendo sequenze di numeri aleatori, o meglio pseudoaleatori. Graficamente vengono rappresentati come in fig. 19. Queste sequenze possono venire usate sia come segnali ad esempio per produrre rumori bianchi o colorati, eventualmente in ingresso ad un filtro; sia come funzione di controllo per dare una variabilit  ai vari parametri della sintesi, che risulta molto gradevole all'ascolto. In fig. 20   rappresentato come si pu  ottenere un vibrato aleatorio.

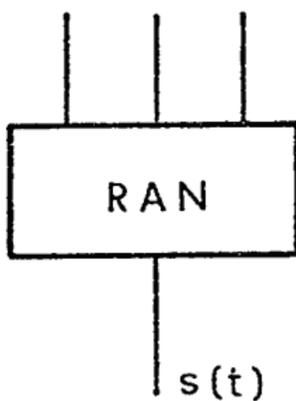


fig. 19

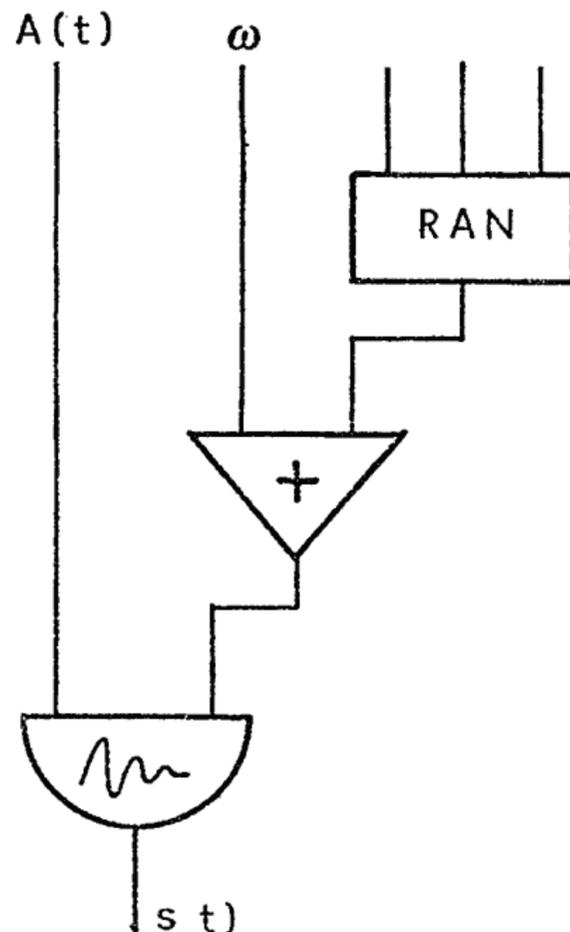


fig. 20

TRASFORMAZIONI LINEARI

Si è visto finora come produrre dei segnali. Vediamo ora come modificarli.

Dato un sistema che trasforma un segnale di ingresso in uno di uscita in base ad un insieme di regole o procedure prefissate, si definisce come trasformazione il modello matematico che descrive il comportamento esterno del sistema.

La trasformazione consiste di due classi di segnali \mathcal{X} e \mathcal{Y} , che rappresentano rispettivamente la classe dei segnali di ingresso e la classe dei segnali in uscita, e di un funzionale $\phi: x \rightarrow y$ in cui ad ogni segnale $x \in \mathcal{X}$ corrisponde uno ed un solo segnale $y = \phi[x] \in \mathcal{Y}$. In tale modello le regole di elaborazione sono condensate nel funzionale ϕ .

Una trasformazione si dice lineare se vale il principio di sovrapposizione:

$$\phi[a_1x_1 + a_2x_2] = a_1\phi[x_1] + a_2\phi[x_2]$$

per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ costanti e $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$

Una trasformazione si dice invariante se la $x(t) \rightarrow y(t)$ implica la $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$ per ogni traslazione t_0 applicabile al segnale di ingresso. Una trasformazione lineare invariante viene chiamata filtro e, nel caso di un ingresso ed una uscita a tempi omogenei, viene descritta nel discreto dalla seguente equazione

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(n-i) \cdot x(i)$$

La sottoclasse dei filtri numerici più importante nelle applicazioni può venire descritta da un'equazione alle differenze a coefficienti costanti della forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$

dove a_k e b_i sono i coefficienti del filtro

$x(n)$ segnale d'ingresso

$y(n)$ segnale di uscita

Se l'ingresso è una sinusoide, l'uscita a regime sarà una sinusoide della stessa frequenza, con ampiezza e fase determinata dal sistema; ciò spiega il nome di filtro attribuito a queste trasformazioni.

Sintesi sottrattiva

Viene chiamata, sebbene impropriamente, sintesi sottrattiva la produzione di suoni mediante filtraggio di una forma d'onda complessa. Prima viene generato con i metodi visti, o altri metodi, un segnale periodico ricco di armoniche o un segnale aleatorio. Esso deve contenere energia in ciascuna frequenza richiesta nel suono finale. Indi vengono usati uno o più filtri per alterare selettivamente le specifiche componenti frequenziali, attenuando (sottraendo) le componenti indesiderate ed eventualmente evidenziando altre. Cambiando i coefficienti del filtro, cambia anche la risposta in frequenza. E' così possibile cambiare le caratteristiche del suono in uscita.

Uno degli aspetti più attrattivi di questa tecnica è che è analoga al funzionamento di molti strumenti musicali acustici e la fisica dello strumento può servire come modello nella sintesi. Ad esempio gli ottoni e i legni usano le labbra o un'ancia vibrante per generare un segnale periodico ricco di armoniche. Le varie cavità e la forma stessa dello strumento funzionano da risuonatori evidenziando certe componenti spettrali e smorzandone altre. Nella voce umana il segnale di eccitazione è costituito da impulsi periodici prodotti dalla glottide per i suoni vocalizzati o da rumore bianco per i suoni non vocalizzati (ad esempio s,z). La gola, la bocca e il naso formano le varie cavità filtranti, che variano di dimensione nel tempo. E' la grande variabilità di queste cavità che rende la voce umana lo strumento musicale più ricco e interessante.

Questo metodo è il più usato attualmente per produrre la voce sintetica. Va però detto che è di uso relativamente difficile e complesso. Infatti i coefficienti del filtro spesso influenzano in maniera complicata e non intuitiva le caratteristiche del filtro. Inoltre i filtri numerici sono molto stabili e precisi ma richiedono molti calcoli.

Una speciale applicazione dei filtri è nella spazializzazione del suono. Si simula cioè un ambiente distribuendo il suono fra i vari altoparlanti e dosando il rapporto tra suono diretto e suono riverberato. Attualmente molti dei riverberatori venduti commercialmente sono numerici. In essi vengono spesso usati speciali filtri, detti passatutto, che non cambiano il contenuto spettrale del suono, ma solo la fase, in modo da separare la riverberazione dalla coloritura del suono.

TRASFORMAZIONI NON LINEARI AD UN INGRESSO

Accanto alle trasformazioni lineari, che hanno larga applicazione anche in altri campi, specialmente nelle ricerche sulla voce e ricerche geologiche, e posseggono una teoria abbastanza matura, vanno diffondendosi da poco nelle applicazioni musicali le trasformazioni non lineari. Più che uno sviluppo omogeneo, in questo campo, si ha l'impiego di alcune particolari trasformazioni tratte principalmente dalla teoria delle comunicazioni elettriche, che si sono rivelate molto promettenti ed efficaci. Basti pensare che da alcuni anni la maggior parte della musica all'elaboratore viene fatta con la modulazione di frequenza.

Le tecniche attualmente impiegate possono distinguersi in due classi:

- trasformazioni istantanee (senza memoria) ad un ingresso in cui se $x(t)$ è il segnale in ingresso e $y(t)$ è il segnale in uscita

$$y(t) = f[x(t)]$$

cioè il valore del segnale in uscita in un certo istante dipende solo dal valore del segnale in ingresso in quell'istante mediante una funzione ad un solo valore. Le tecniche di sintesi di questo tipo sono la distorsione non lineare e la sommatoria discreta;

- modulazioni in cui si hanno due o più ingressi ed un'uscita. Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono gli ingressi

$$y(t) = f[x_1(t), x_2(t)]$$

Esempi di questo tipo sono la modulazione ad anello (moltiplicazione), la modulazione di ampiezza e la modulazione di frequenza.

Spesso i segnali di ingresso vengono variati di ampiezza moltiplicandoli per un parametro I , costante o funzione del tempo, chiamato indice di modulazione. Essendo la trasformazione non lineare, il segnale in uscita varia in maniera non banale. E' possibile quindi, agendo su un solo parametro, modificare sostanzialmente le caratteristiche del suono; si rende così estremamente agevole produrre spettri dinamici e variabili.

Si confronti in proposito la quantità di dati necessari per la sintesi additiva.

Queste tecniche si stanno affermando per l'alta efficienza in termini di

calcolo e per la loro versatilità.

I calcoli da effettuare in genere sono pochi ed essendo spesso trasformazione istantanea e invariante nel tempo, essa non viene calcolata ogni volta, ma può essere tabulata all'inizio per tutto il campo di valori che può assumere l'ingresso. Una volta quindi tabulata la funzione, non si fanno più calcoli ma solo si preleva il valore dalla tabella. E' possibile scegliere come si vuole la funzione non lineare ed ottenere interessanti variazioni del timbro agendo su un ridotto numero di parametri (di solito ampiezze) detti indici di modulazione. Ciò offre grande libertà e versatilità nell'uso.

Inoltre spesso negli strumenti acustici esistono comportamenti non lineari, che caratterizzano i suoni prodotti. Queste tecniche hanno quindi una corrispondenza nel mondo fisico e realizzano o dilatano queste caratteristiche.

Di seguito verranno trattate abbastanza estesamente le principali proprietà di queste tecniche, in quanto particolarmente rilevanti nell'attuale panorama della computer-music.

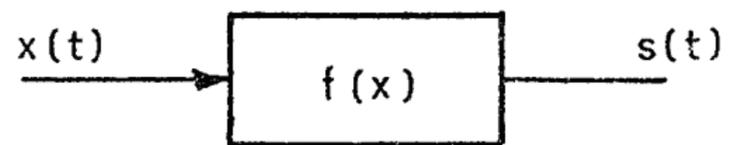
Sintesi per distorsione non lineare

Immaginiamo un segnale di tipo coseno $x(t) = \cos \omega t$ e lo facciamo passare per un amplificatore non lineare (fig. 21). Si verifica una distorsione. La forma d'onda in uscita non sarà più di tipo coseno ma potrà essere scomposta in una somma di termini sinusoidali. Se $f(x)$ è la funzione istantanea ampiezza in ingresso - ampiezza in uscita dell'amplificatore, si otterrà in uscita un segnale $s(t) = f(\cos \omega t)$, trasformato da $f(x)$.

Per analizzare questo segnale e l'influenza del tipo di funzione distorcente, conviene considerare i polinomi di Chebyshev di prima specie.

Posto

$$x = \cos \theta,$$



si definisce il polinomio di Chebyshev di grado n

fig. 21

$$T_n(x) = T_n(\cos \theta) = \cos n \theta$$

Dalla definizione si ricava immediatamente il valore dei primi due polinomi

$$T_0(x) = \cos(0 \cdot \theta) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(1 \cdot \theta) = x$$

E' possibile ricavare una relazione ricorsiva che fornisce il valore di un polinomio in funzione dei polinomi di grado inferiore. Infatti dalla relazione trigonometrica

$$\cos n \theta \cdot \cos \theta = \frac{\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta}{2}$$

si ricava

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cdot \cos \theta \cdot [\cos n \theta - \cos(n-1)\theta]$$

e cioè

$$T_{n+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Si possono quindi calcolare i successivi polinomi:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

Si osservi che questi polinomi pur esistendo su tutto l'asse reale, sono propriamente definiti nell'intervallo $[-1,1]$. E' questo infatti il campo di variabilità di $\cos \theta$.

All'ortogonalità delle funzioni $\cos n\theta$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ corrisponde l'ortogonalità dei polinomi di Chebishev nell'intervallo $[-1,1]$ secondo la funzione peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Si osservi che se la funzione distorcente $f(x)$ coincide con un polinomio di Chebishev

$$f(x) \equiv T_n(x)$$

in corrispondenza ad un segnale in ingresso $x = \cos(\omega t)$ si avrà in uscita $s(t) = f(\cos \omega t) = T_n(\cos \omega t) = \cos n\omega t$ solo l'armonica n-esima. E' possibile quindi produrre qualsiasi spettro composto da coseni

$$s(t) = \sum_i h_i \cos(i \omega t)$$

prendendo come funzione distorcente la corrispondente combinazione lineare di polinomi di Chebyshev

$$f(t) = \sum_i h_i T_i(x)$$

E s e m p i o

Si voglia uno spettro composto dalle prime cinque armoniche con ampiezza $h_1=9, h_2=3, h_3=5, h_4=7, h_5=1$

$$f(x) = 9T_1(x) + 3T_2(x) + 5T_3(x) + 7T_4(x) + 1T_5(x)$$

$$9T_1(x) = \quad \quad 9x$$

$$3T_2(x) = \quad -3 \quad \quad +6x^2$$

$$5T_3(x) = \quad -15x \quad \quad +20x^3$$

$$7T_4(x) = \quad -7 \quad \quad -56x^2 \quad \quad +56x^4$$

$$1T_5(x) = \quad \quad 5x \quad \quad -20x^3 \quad \quad +16x^5$$

$$f(x) = \quad 4 \quad -x \quad -50x^2 \quad \quad +56x^4 \quad +16x^5$$

Nell'intervallo $[-1,1]$ l'ampiezza massima, in valor assoluto, di un polinomio di Chebyshev vale 1. Per cui se gli h_i sono positivi, l'ampiezza massima di questa caratteristica vale $\sum_i h_i$, e cioè alla somma dei pesi di ciascun polinomio di Chebyshev. Nell'esempio precedente il massimo vale: $9+3+5+7+1=25$

Esprimiamo ora il calcolo della funzione polinomiale distorcente in forma matriciale. Si supponga di volere in uscita un segnale $s(t) = \sum_j h_j \cos j \omega t$, avendo in ingresso un segnale sinusoidale. La funzione distorcente vale $f(t) = \sum h_j T_j(x) = \sum_i d_i x^i$. La funzione è sviluppabile sia in termini di polinomi di Chebyshev, sia di serie di potenze. Si tratta di passare da una base all'altra. Vale la relazione

$$\underline{d} = \underline{B} \cdot \underline{h}$$

in cui \underline{d} e \underline{h} sono i vettori colonna contenenti i coefficienti rispettivamente nello sviluppo in serie di potenze e di polinomi di Chebyshev \underline{B} è una matrice avente per prima colonna i coefficienti di T_j secondo x^i (Tab. 1).

$$T_j(x) = \sum_i b_{ij} x^i$$

I coefficienti b_{ij} possono essere ricavati con la stessa relazione vista per i polinomi $T_j(x)$. A partire da

$$b_{00} = 1$$

$$b_{01} = 0$$

$$b_{11} = 1$$

→

$$b_{ij} = 2 b_{i-1,j-1} - b_{i,j-2}$$

confronta

$$T_j = 2x \cdot T_{j-1} - T_{j-2}$$

Si osservi che se invece è dato il polinomio distortente, mediante i coefficienti $\{d_i\}$, è possibile analizzare il risultato, e cioè le armoniche generate risolvendo il sistema

$$\underline{B} \cdot \underline{h} = \underline{d}$$

in cui le h sono incognite. La matrice \underline{B} è triangolare, per cui conviene applicare il metodo di GAUSS, e cioè operare le sostituzioni all'indietro.

In pratica se $P_N(x) = \sum_0^N d_i x^i$, si calcola anzitutto $h_N = \frac{d_N}{2^{N-1}}$, poi si sottrae $P_{N-1}(x) = P_N - h_N T_N(x)$ abbassando così di 1 il grado del polinomio. Si calcola $h_{N-1} = \frac{d'_{N-1}}{2^{N-2}}$ e si procede iterativamente.

E' possibile esprimere in maniera compatta

$$\underline{h} = \underline{A} \cdot \underline{d} \quad \text{con} \quad \underline{A} = \underline{B}^{-1}$$

La colonna j -esima di A contiene le componenti di x espresse in termine di T_i (Tab. 2).

$$x_j = \sum_0^j a_{ij} T_i(x)$$

E' possibile ricavare un'espressione ricorsiva, anche se meno semplice. Se

$$(\cos \theta)^{n-1} = \sum_0^{n-1} a_{i,n-1} \cos i \theta$$

1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
0	1	0	-3	0	5	0	-7	0	9	0	-11	0
0	0	2	0	-8	0	18	0	-32	0	50	0	-72
0	0	0	4	0	-20	0	56	0	-120	0	220	0
0	0	0	0	8	0	-48	0	160	0	-400	0	840
0	0	0	0	0	16	0	-112	0	432	0	-1232	0
0	0	0	0	0	0	32	0	-256	0	1120	0	-3584
0	0	0	0	0	0	0	64	0	-576	0	2816	0
0	0	0	0	0	0	0	0	128	0	-1280	0	6912
0	0	0	0	0	0	0	0	0	256	0	-2816	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	512	0	-6144
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1024	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2048

Tab. 1: Matrice B

1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{10}{32}$	0	$\frac{35}{128}$	0	$\frac{126}{512}$	0	$\frac{462}{2048}$
0	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{10}{16}$	0	$\frac{35}{64}$	0	$\frac{126}{256}$	0	$\frac{462}{1024}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{8}$	0	$\frac{15}{32}$	0	$\frac{56}{128}$	0	$\frac{84}{512}$	0	$\frac{792}{2048}$
0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{16}$	0	$\frac{21}{64}$	0	$\frac{84}{256}$	0	$\frac{330}{1024}$	0
0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{6}{32}$	0	$\frac{28}{128}$	0	$\frac{36}{512}$	0	$\frac{495}{2048}$
0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{7}{64}$	0	$\frac{36}{256}$	0	$\frac{165}{1024}$	0
0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{8}{128}$	0	$\frac{45}{512}$	0	$\frac{220}{2048}$
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{64}$	0	$\frac{9}{256}$	0	$\frac{55}{1024}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{128}$	0	$\frac{10}{512}$	0	$\frac{66}{2048}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{256}$	0	$\frac{11}{1024}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{512}$	0	$\frac{12}{2048}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{1024}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2048}$

Tab. 2: Matrice A

$$\cos^n \theta = \cos^{n-1} \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} a_{i,n-1} \cos(i+1)\theta + \cos(i-1)\theta$$

Vale quindi

$$\begin{aligned} a_{00} &= 1 & a_{0j} &= \frac{1}{2} a_{1,j-1} \\ a_{01} &= 0 & \text{da cui} & a_{ij} = \frac{a_{i+1,j-1} + a_{i-1,j-1}}{2} \quad i \neq 1 \\ a_{11} &= 1 & & a_{ij} = \frac{a_{2,j-1}}{2} + a_{0,j-1} \quad i = 1 \end{aligned}$$

infatti $\cos -\theta = \cos \theta$

Spettri dinamici

Analizziamo cosa succede se variamo l'ampiezza del coseno in ingresso. Se $f(x) = \sum_i d_i x^i$, e $x(t) = I \cos \omega t$ ottengo

$$s(t) = f(I \cos \omega t) = \sum_i d_i (I \cos \omega t)^i = \sum_i d_i I^i (\cos \omega t)^i$$

E' come se avessi cambiato la $f(x)$ e quindi la caratteristica. Posto

$$\bar{d}_i = d_i I^i \quad \text{risulta} \quad s(t) = \sum \bar{d}_i (\cos \omega t)^i$$

$$\underline{h} = \underline{A} \cdot \underline{\bar{d}} = \underline{A} \begin{vmatrix} d_0 \\ d_1 I \\ d_2 I^2 \\ \vdots \\ d_n I^n \end{vmatrix}$$

E' come se ogni coefficiente d_i del polinomio fosse moltiplicato per I^i . L'ampiezza delle armoniche risultanti dipende da I . Si ha che:

$$h_i(I) = \sum_{ij} a_{ij} d_j I^j$$

Essendo A una matrice triangolare, l'ampiezza di ogni armonica è un polinomio in I di grado n . I coefficienti di questo polinomio sono dati dal prodotto della riga i -esima di \underline{A} per i coefficienti del polinomio distorto.

Sono presenti inoltre solo i monomi, pari per i pari e dispari per i dispari, compresi tra i e n . In particolare l'ampiezza delle ultime due armoniche varia secondo un monomio di I . Questo fatto è caratteristico della distorsione mediante un polinomio. Ogni colonna di A è il contributo, in armoniche di un singolo monomio del polinomio, il cui contributo è proporzionale a d_j (suo coefficiente).

Variando quindi l'indice I varia anche lo spettro risultante e le proporzioni tra le armoniche. E' questa la proprietà che rende interessante questa tecnica di sintesi.

In fig. 22 è rappresentata graficamente la tecnica di sintesi per distorsione non lineare con indice I variabile. Va osservato che si è usato per la derivazione delle formule un ingresso costituito da un coseno. Se si usa invece un seno, non cambia la forma d'onda, a parte una traslazione nel tempo. E' quindi consigliabile in genere usare un seno, in quanto parte da zero. Si evita così una possibile discontinuità all'inizio.

Esempio di calcolo degli spettri dinamici

$$p(x) = 2x^2 + x - 1$$

$$h_2(I) = I^2$$

$$h_1(I) = I$$

$$h_0(I) = I^2 - 1$$

E s e m p i o

$$p(x) = 16x^5 + 56x^4 - 50x^2 - x - 4$$

$$h_5(I) = \frac{16}{16} I^5 = I^5$$

$$h_4(I) = \frac{56}{8} I^4 = 7 I^4$$

$$h_3(I) = \frac{5}{16} 16 I^5 = 5 I^5$$

$$h_2(I) = \frac{4}{8} 56 I^4 - \frac{1}{2} 50 I^2 = 28 I^4 - 25 I^2$$

$$h_1(I) = \frac{10}{16} 16 I^5 - I = 10 I^5 - I$$

$$h_0(I) = \frac{3}{8} 56 I^4 - \frac{1}{2} 50 I^2 + 4 = 21 I^4 - 25 I^2 + 4$$

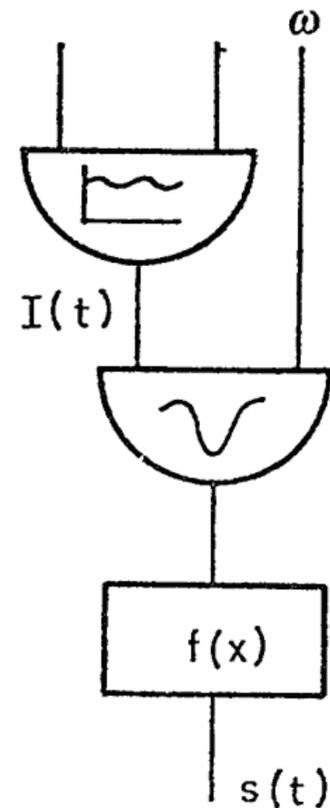


fig. 22

Si osservi che

$$h_5(1)=1, \quad h_4(1)=7, \quad h_3(1)=5, \quad h_2(1)=3, \quad h_1(1)=9, \quad h_0(1)=0$$

come era stato visto precedentemente, nel caso di spettro statico.

Normalizzazione dell'ampiezza

Al variare dell'indice di modulazione I varia anche l'ampiezza del suono in uscita. Questa può essere compensata secondo criteri differenti, mediante un'opportuna funzione di normalizzazione che moltiplichi l'uscita della distorsione. Un criterio è la normalizzazione del valore efficace

$$V_{\text{eff}}(I) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\bar{n}} h_i^2(I)}$$

Il valore efficace dipende dalla caratteristica distorcente e dall'indice di modulazione. Il segnale normalizzato sarà quindi

$$s_{\text{NORM}}(t) = \frac{f(I \cos \omega t)}{V_{\text{eff}}(I)}$$

Un altro criterio è la normalizzazione rispetto al massimo valore di picco

$$V_{\text{MAX}}(I) = \max_{-I \leq \alpha \leq I} |f(\alpha)|$$

E' questa una funzione non decrescente composta da segmenti di f congiunti da tratti orizzontali.

In genere il segnale non avrà ampiezza costante, ma seguirà un certo inviluppo, e quindi il segnale normalizzato in ampiezza, viene poi ulteriormente variato. Si cerca quindi di evitare la normalizzazione, combinandola nell'involuppo di ampiezza in maniera sperimentale e/o intuitiva, avendo considerate le curve di normalizzazione. E' consigliabile anche scegliere i coefficienti pari del polinomio a segni alternati; analogamente quelli dispari. Convieni seguire cioè questo modello: + + - - + + - - E' consigliabile inoltre non interrompere bruscamente l'ampiezza della h_i e cioè limitare bruscamente la banda. Ciò infatti determina uno spettro molto irregolare al variare dell'indice di modulazione I .

Si osservi inoltre che i parametri pari e dispari sono indipendenti; infatti i coefficienti pari producono solo parziali pari, i coefficienti dispari solo parziali dispari. E' opportuno inoltre porre $d_0=0$ per evitare clic di inizio o alla fine del suono. Si avrebbe infatti una discontinuità.

Ingresso composto

Se il segnale in ingresso è un coseno più una costante $z(t) = \alpha + \beta \cos \omega t$ o, in generale la combinazione lineare di coseni le cui pulsazioni sono multiple di una fondamentale e cioè $z(t) = \sum_{k=0}^{\bar{n}} r_k \cos k \omega t$ posto $\bar{x} = \cos \omega t$ e $\underline{q} = \underline{B} \cdot \underline{r}$

$$z(t) = \sum_0^n r_k T_k(\bar{x}) = \sum_0^n q_k (\bar{x})^k$$

Anche $(z(t))^2$, $(z(t))^3$ ecc. sono polinomi trigonometrici in \bar{x} . Pongo quindi

$$(z(t))^i = \sum_0^{i \cdot n} c_{ki} (\bar{x})^k \quad \text{essendo} \quad c_{k1} = q_k \quad \text{per} \quad k=0,1,\dots,n$$

Se la funzione distorcente è un polinomio $f(t) = \sum d_i x^i$ per $x = z(t)$ si ha:

$$s(t) = f(z(t)) = \sum d_i x^i = \sum_i d_i \sum_k c_{ki} (\bar{x})^k = \sum_k \sum_i d_i c_{ki} (\bar{x})^k$$

e posto

$$\bar{d}_k = \sum_i d_i c_{ki} \rightarrow = \sum_k \bar{d}_k (\bar{x})^k$$

In forma matriciale

$$\underline{h} = \underline{A} \cdot \underline{C} \cdot \underline{d}$$

essendo la colonna i -esima di C costituita dalle componenti di $(z(t))^i$ rispetto alle potenze di \bar{x} .

Ad esempio $z(t) = \alpha + \beta \cos \omega t$

$$\underline{C} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \cdot \\ & & 2\alpha\beta & 3\alpha^2\beta & \cdot \\ & & \beta^2 & 3\alpha\beta^2 & \cdot \\ & & & \beta^3 & \cdot \end{vmatrix}$$

Se n è il grado del polinomio in ingresso ed m il grado del polinomio di distorcente la matrice C avrà $(n \cdot m + 1)$ righe e $(m + 1)$ colonne.

Se l'ingresso non è una semplice senoide si complica l'analisi del risultato della distorsione. Per una trattazione analitica si rimanda alla bibliografia (Reinhart et al.). Qui interessa dare alcuni risultati qualitativi.

Se l'ingresso è costituito da due coseni di pulsazione rispettivamente ω_1 e ω_2

$$x = I_1 \cos \omega_1 t + I_2 \cos \omega_2 t$$

e la funzione distorcente è un polinomio di grado N, saranno presenti tutte le componenti a pulsazione $m\omega_1 \pm n\omega_2$ ($0 \leq m \leq N$ e $0 \leq n \leq N$) e con ampiezza esprimibile come un polinomio di grado N in I_1 e I_2 . Questa situazione si verifica negli strumenti tradizionali quando producono i suoni multifonici, suoni con più altezze distinguibili.

TRASFORMAZIONI NON LINEARI A PIU' INGRESSI

Modulazione ad anello (moltiplicazione)

Si chiama modulazione ad anello o sintesi moltiplicativa il prodotto nel tempo tra due segnali.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono i due segnali in ingresso, l'uscita vale

$$s(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

La rappresentazione grafica è illustrata in fig. 23.

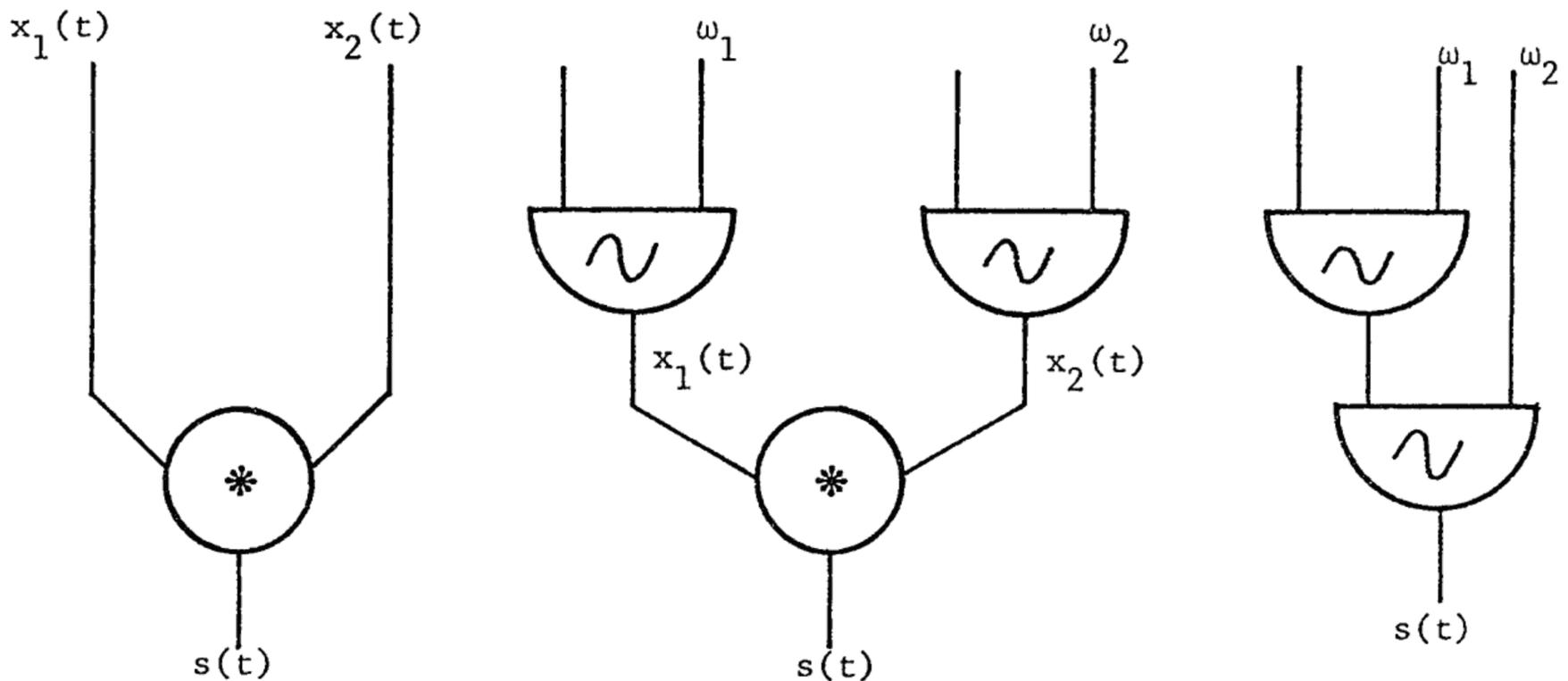


fig. 23

La moltiplicazione di funzioni nel tempo equivale, nel dominio della frequenza, alla convoluzione dei loro spettri.

Vediamo prima un esempio.

Dalla seguente identità trigonometrica

$$\cos\alpha \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(\alpha+B) + \cos(\alpha-B)]$$

si ricava che nel caso di 2 segnali in ingresso di tipo sinusoidale

$$x_1(t) = \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$x_2(t) = \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$s(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) = \frac{1}{2} \cos [(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1 + \phi_2] + \\ + \frac{1}{2} \cos [(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2]$$

Ciò corrisponde quindi ad avere due segnali sinusoidali di pulsazione $\omega_1 + \omega_2$ e $\omega_1 - \omega_2$. Se ad esempio x_1 ha frequenza 400 Hz e x_2 ha frequenza 100 Hz, il suono risultante ha due componenti di frequenza 500 Hz e 300 Hz.

Se $x_1(t) = \cos \Omega t$ è un segnale cosinusoidale di pulsazione Ω e $x_2(t)$ è un segnale qualsiasi con spettro $X_2(\omega)$, il segnale generato moltiplicando nel tempo i due segnali

$$s(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

ha lo spettro dato da

$$S(\omega) = \frac{1}{2} [X_2(\omega + \Omega) + X_2(\Omega - \omega)]$$

Si hanno perciò due bande laterali simmetriche rispetto Ω e di ampiezza metà rispetto a x_2 . In particolare se $x_2(t)$ è periodico, può essere rappresentato con la serie di Fourier

$$x_2(t) = \sum_{k=1}^N b_k \cos(k \omega_2 t + \phi_k)$$

e il segnale risultante

$$s(t) = \cos \Omega t \cdot \sum_{k=1}^N b_k \cos(k \omega_2 t + \phi_k) = \\ = \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{2} \{ \cos [(\Omega + k\omega_2)t + \phi_k] + \cos [(\Omega - k\omega_2)t - \phi_k] \}$$

In definitiva a prescindere dalla fase, risulta un segnale composto da parziali di pulsazione $|\Omega \pm k\omega|$ con $k > 0$, formula questa molto tipica dei metodi di sintesi non lineari. Più avanti verranno dati dei criteri di scelta di Ω e ω e di in

interpretazione per questo tipo di suoni. Con riferimento alle comunicazioni elettriche x_1 viene chiamata portante e x_2 modulante,

Se x_1 è un coseno con fase iniziale diversa da zero

$$x_1(t) = \cos(\Omega t + \alpha)$$

questo sfasamento si riproduce nelle singole componenti. Ciò ha importanza solo se vi sono sovrapposizioni di componenti ad ugual frequenza. In tal caso si deve fare la somma tenendo conto delle fasi degli addendi.

Se x_1 è periodico anche esso può essere scomposto in serie di Fourier

$$x_1(t) = \sum_1^M a_k \cos(k\Omega t + \theta_k)$$

Vi saranno quindi attorno ad ogni parziale di x_1 le bande laterali con ampiezza proporzionale all'ampiezza delle parziali. Le componenti presenti hanno pulsazione del tipo $|k\Omega \pm i\omega|$.

Se $\Omega \leq M \cdot \omega$, cioè se Ω è minore della banda di x_2 , allora le varie bande laterali si intersecano, con possibili sovrapposizioni delle componenti. In questo caso va fatta la somma delle ampiezze tenendo conto delle fasi.

Modulazione d'ampiezza (AM)

Con la modulazione ad anello eseguendo il prodotto tra un segnale sinusoidale (portante) ed uno qualsiasi, nello spettro risultante scompare la componente corrispondente alla portante. È possibile introdurla eseguendo un differente tipo di modulazione, chiamato modulazione di ampiezza.

La formula della modulazione di ampiezza è

$$s(t) = x_1(t) \cdot (1 + x_2(t)) = x_1(t) + x_1(t) \cdot x_2(t)$$

La rappresentazione grafica è illustrata in fig. 24.

L'effetto risultante è quello della modulazione ad anello con sommata la portante. Nel caso di portante sinusoidale e modulante periodica si ottiene uno spettro composto da parziali di pulsazione $|\Omega \pm k\omega|$ con $k = 0, 1, \dots, M$. Si è usato il modulo in quanto può risultare che la pulsazione di alcune componenti sia negativa, ma ciò equivale ad un cambiamento di fase. All'ascolto la fase non ha importanza, se non vi sono componenti sovrapposte. Variando l'ampiezza della modulante, in uscita varia proporzionalmente l'ampiezza delle bande laterali ri-

spetto alla portante.

Con questo tipo di modulazione è possibile trasformare uno spettro armonico (contenente cioè parziali con frequenza multipla della fondamentale, secondo numeri interi) in suoni di spettro inarmonico. Usata quindi in combinazione con le altre tecniche, ne arricchisce di molto le possibili applicazioni.

Sintesi per modulazione di frequenza e di fase

Consideriamo un segnale sinusoidale caratterizzato da pulsazione ω_c e fase iniziale ϕ . Immaginiamo che la fase non sia costante nel tempo. Si avrà

$$s(t) = \text{sen}(\omega_c t + \phi(t))$$

Analizziamo ora lo spettro nel caso che anche $\phi(t)$ sia sinusoidale con pulsazione ω_m e ampiezza I

$$\phi(t) = I \text{sen} \omega_m t$$

Posto $C = \omega_c t$, $\theta = \omega_m t$, risulta

$$s(t) = \text{sen}(C + I \text{sen} \theta) = \text{sen} C \cos(I \text{sen} \theta) + \cos C \cdot \text{sen}(I \text{sen} \theta)$$

Per sviluppare questa espressione si usano le seguenti relazioni

$$\cos(I \text{sen} \theta) = \sum_{k \text{ pari}} J_k(I) \cos k \theta = J_0(I) + 2[J_2(I) \cos 2 \theta + J_4(I) \cos 4 \theta + \dots]$$

$$\text{sen}(I \text{sen} \theta) = \sum_{k \text{ dispari}} J_k(I) \text{sen} k \theta = 2[J_1(I) \text{sen} \theta + J_3(I) \text{sen} 3 \theta + \dots]$$

dove $J_k(x)$ è la funzione di Bessel del primo tipo e del k-esimo ordine.

Le funzioni di Bessel hanno le seguenti proprietà

$$J_k(-x) = J_k(x) \quad \text{simmetria}$$

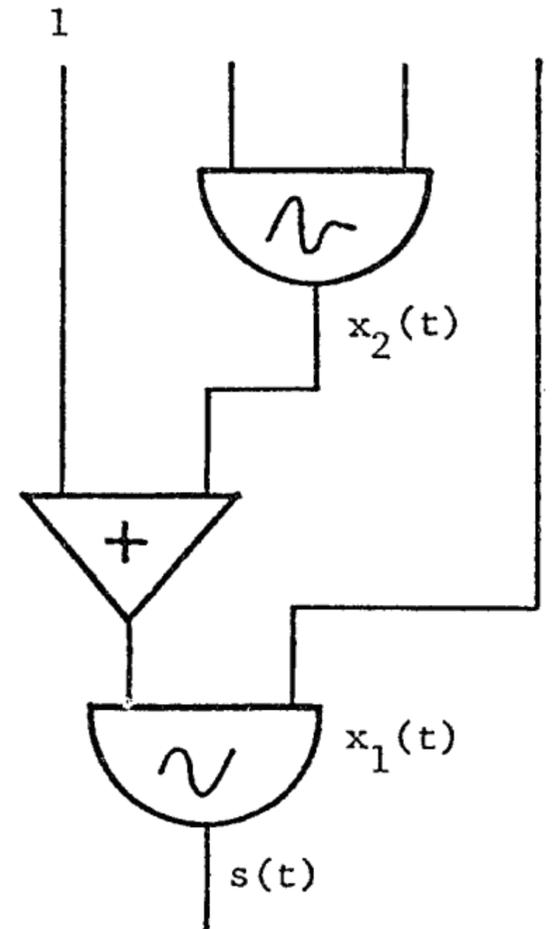


Fig. 24

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x) \rightarrow \begin{array}{l} k \text{ pari} \quad J_{-k}(x) = J_k(x) \\ k \text{ dispari} \quad J_{-k}(x) = -J_k(x) \end{array}$$

Sostituendo queste espressioni nel segnale si ottiene

$$s(t) = \text{sen } C \cdot \sum_{k \text{ pari}} J_k(I) \cos k\theta + \cos C \cdot \sum_{k \text{ dispari}} J_k(I) \text{sen } k\theta$$

che può essere vista come la somma di due modulazioni ad anello

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{k \text{ pari}} J_k(I) \text{sen}(C+k\theta) + \frac{1}{2} \sum_{k \text{ pari}} J_k(I) \text{sen}(C-k\theta) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \text{ dispari}} J_k(I) \text{sen}(C+k\theta) - \frac{1}{2} \sum_{k \text{ dispari}} J_k(I) \text{sen}(C-k\theta) \end{aligned}$$

Le sommatorie si estendono da $-\infty$ a $+\infty$ per cui si può sostituire k con $-k$ nel secondo addendo,

$$\sum_{k \text{ pari}} J_k(I) \text{sen}(C-k\theta) = \sum_{k \text{ pari}} J_{-k}(I) \text{sen}(C+k\theta) = \sum_{k \text{ pari}} J_k(I) \text{sen}(C+k\theta)$$

essendo $J_{-k} = J_k(x)$, risulta quindi uguale al 1° addendo.

Analogamente nel 4° addendo

$$\sum_{k \text{ dispari}} J_k(I) \text{sen}(C-k\theta) = \sum_{k \text{ dispari}} J_{-k}(I) \text{sen}(C+k\theta) = - \sum_{k \text{ dispari}} J_k(I) \text{sen}(C+k\theta)$$

essendo $J_{-k} = -J_k$ per k dispari, risulta quindi uguale al 2° addendo.

Risulta infine

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k \text{ pari}} J_k(I) \text{sen}(C+k\theta) + \sum_{k \text{ dispari}} J_k(I) \text{sen}(C+k\theta) = \\ &= \sum J_k(I) \text{sen}(C+k\theta) = \sum J_k(I) \text{sen}(\omega_c + k\omega_m)t \end{aligned}$$

Lo spettro di un'onda modulata in fase contiene quindi componenti alla frequenza somma e differenza della portante ω_c con le varie armoniche intere della modulante ω_m ($\omega_c + k\omega_m$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

E' dimostrato dalla proprietà delle funzioni di Bessel che le ampiezze delle componenti alle frequenze laterali cadono rapidamente non appena l'ordine delle armoniche supera l'indice di modulazione.

Pulsazione istantanea

Dato un segnale del tipo $s(t) = \text{sen}(\psi(t))$ la derivata della fase viene chiamata pulsazione istantanea

$$\omega_i(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

Nel caso della modulazione di fase sopra esaminata

$$s(t) = \text{sen}(\omega_c t + I \text{sen } \omega_m t)$$
$$\omega_i(t) = \frac{d(\omega_c t + I \text{sen } \omega_m t)}{dt} = \omega_c + I \omega_m \cos \omega_m t$$

la pulsazione istantanea varia attorno ω_c proporzionalmente a $d = I \omega_m$, che è la massima deviazione della pulsazione istantanea attorno a ω_c .

Modulazione di frequenza

Si parla di modulazione di frequenza quando la pulsazione istantanea non è costante, ma varia nel tempo attorno ad un certo valore secondo una funzione del tempo, detta modulante.

$$\omega_i(t) = \omega + \xi(t) \quad \text{essendo } \xi(t) \text{ la modulante}$$

La fase istantanea di questo segnale è l'integrale della pulsazione istantanea

$$\psi(t) = \int (\omega + \xi(t)) dt = \omega t + \int \xi(t) dt$$

e cioè

$$s(t) = \text{sen}(\omega t + \int \xi(t) dt)$$

Attraverso l'integrazione della funzione modulante in frequenza si passa alla modulazione di fase.

Se si sceglie come modulante di frequenza

$$\xi(t) = d \cos \omega_m t = I \omega_m \cos \omega_m t$$

si ottiene

$$s(t) = \text{sen}(\omega_c t + I \text{sen } \omega_m t)$$

che è l'espressione prima studiata nella modulazione di fase. Lo spettro sarà quindi lo stesso

$$s(t) = \sum J_k(I) \text{sen}(\omega_c + k\omega_m)t$$

Nella figura 25 sono riportati gli andamenti delle funzioni di Bessel del primo tipo e di ordine 0,1; 2,3; 4,5. Con questi grafici è possibile ricavare lo spettro risultante.

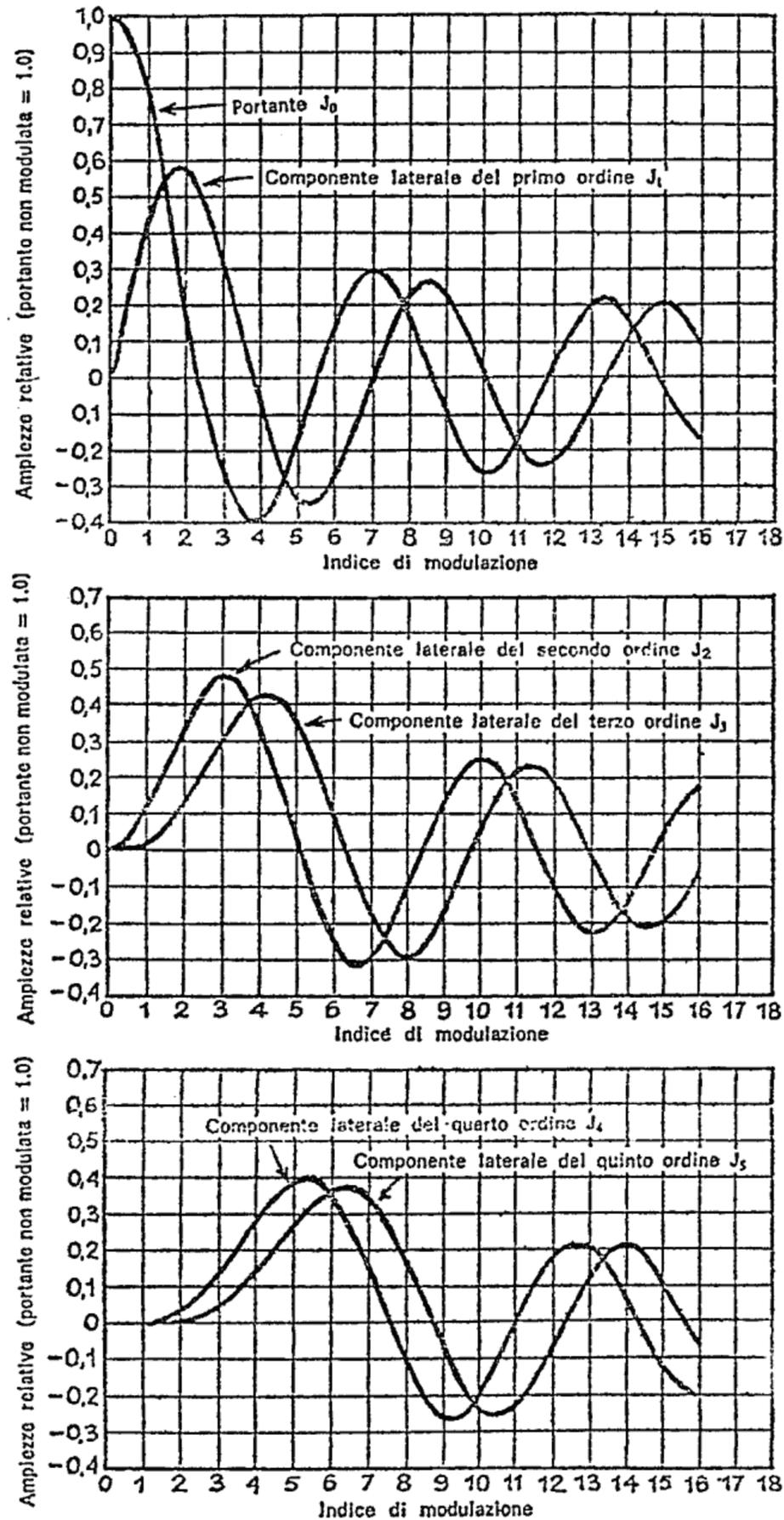


fig. 25

In fig. 26 è illustrato come varia lo spettro al variare dell'indice di modulazione.

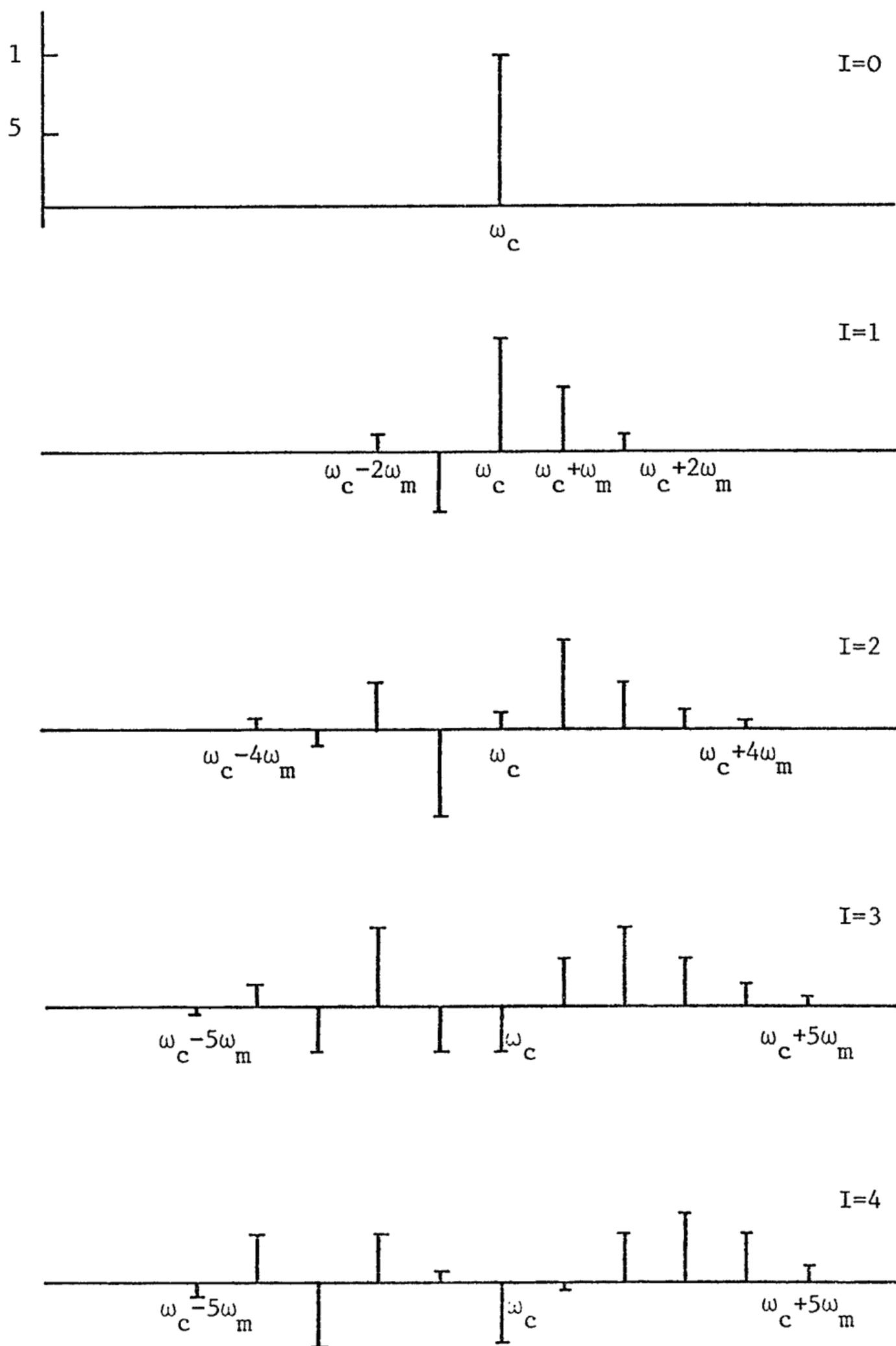


fig. 26

Se ω_c non è molto maggiore di ω_m , può accadere che, per alcuni valori di k , le frequenze dei termini componenti lo spettro siano negative. Essendo lo spettro composto da una somma di termini sinusoidali e valendo la relazione

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta = \text{sen}(\theta-\pi)$$

una frequenza negativa può essere interpretata come una frequenza positiva con inversione di fase. Ciò corrisponde a pensare, quando si studia uno spettro di termini sinusoidali che deriva da una formula del tipo $\omega_c + k\omega_m$, con k intero qualsiasi, che le componenti si ribaltano attorno allo zero cambiando segno. Queste componenti ribaltate vanno a sommarsi algebricamente con quelle eventualmente preesistenti alla stessa frequenza.

Nella figura 27 è illustrato il caso di $\omega_m = \omega_c$ ed $I = 4$ prima e dopo il ribaltamento della frequenza negativa.

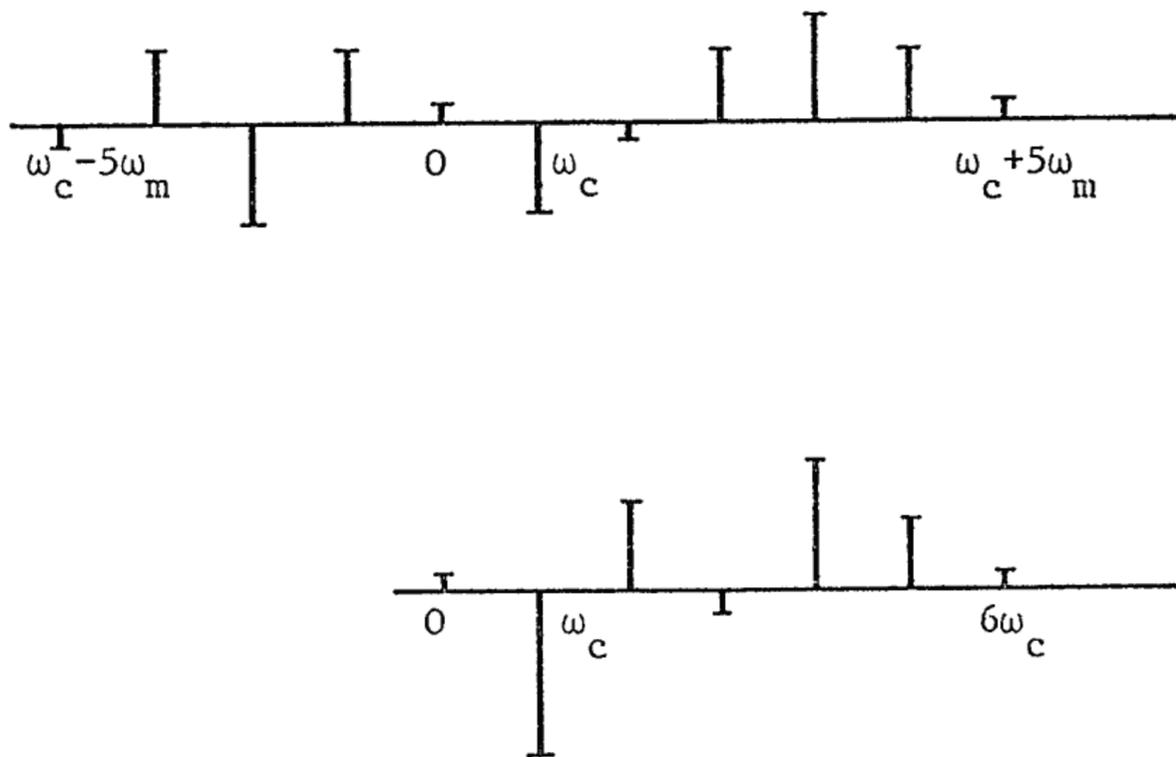


fig. 27

Al variare dell'indice di modulazione I , varia non solo l'ampiezza delle componenti laterali ma anche il modo di combinarsi in presenza di ribaltamenti.

E' da osservare che se le componenti fossero di tipo coseno, il ribaltamento avverrebbe senza inversione di fase. Infatti

$$\text{cos}(-\theta) = \text{cos}\theta$$

In figura 28 e 29 sono riportate le rappresentazioni grafiche della modula-

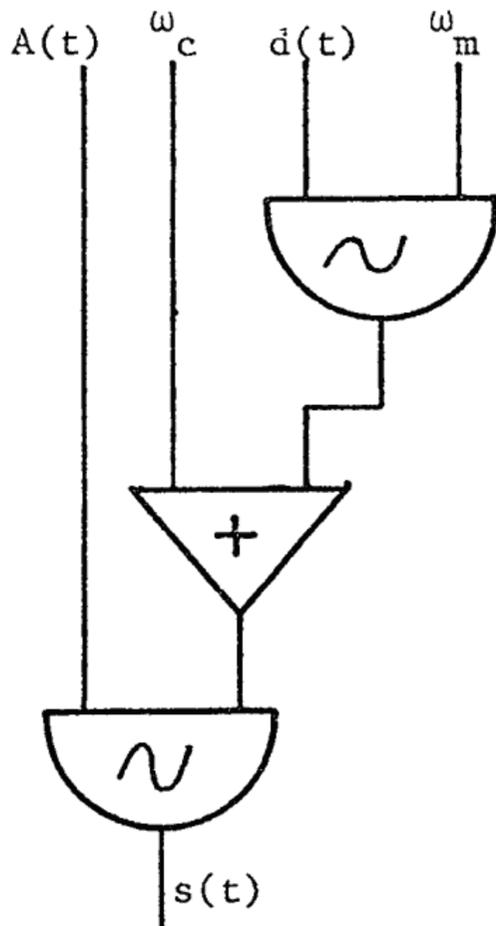


fig. 28

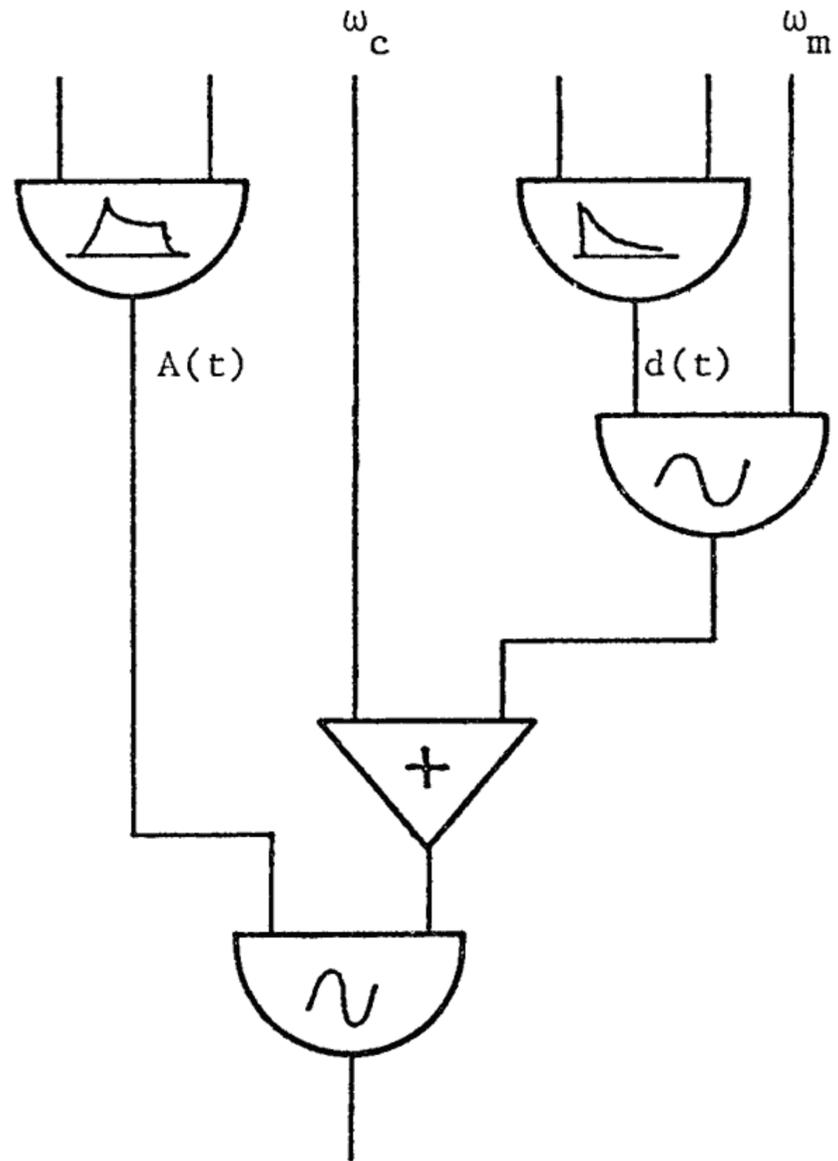


fig. 29

zione di frequenza nel caso di portante e modulante semplici.

Scelta del rapporto portante-modulante

Le considerazioni che seguono valgono per tutti gli spettri, le cui componenti abbiano frequenze del tipo $|C+km|$ dove

- C = frequenza portante
- m = frequenza modulante
- k = intero qualsiasi

Vale quindi anche per i suoni trasformati mediante modulazioni di tipo moltiplicativo. Lo spettro è caratterizzato dal rapporto C/m . Se questo rapporto è un numero razionale, può essere espresso come una frazione irriducibile

$$\frac{C}{m} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{dove} \quad N_1 \text{ e } N_2 \text{ sono numeri interi primi tra loro.}$$

In questo caso il suono risultante è armonico, nel senso che le varie componenti sono multiple, secondo fattori interi, di una fondamentale.

La frequenza della fondamentale è data da:

$$f_0 = \frac{C}{N_1} = \frac{m}{N_2}$$

e la portante è la N_1 -esima armonica.

Se $N_2 = 1$ sono presenti tutte le armoniche e le bande laterali si sovrappongono fra di loro.

Se $N_2 = 2$ sono presenti solo le armoniche dispari e le bande laterali si sovrappongono fra di loro.

Se $N_2 = 3$ mancano le armoniche multiple di 3.

Il rapporto è anche indice dell'armonicità o "armoniosità" dello spettro, intendendo con questo termine la gradevolezza all'ascolto data dalla fusione delle componenti. Intuitivamente, più il rapporto C/m è semplice, più il suono è armonioso. Formalmente, minore è il minimo comune multiplo, più il suono è armonioso. Quindi se N_1/N_2 è in forma irriducibile, minore è il prodotto $N_1 \cdot N_2$.

I rapporti possono essere raggruppati in famiglie. Tutti i rapporti del tipo $\frac{|C+km|}{m}$, $k \in \mathbb{Z}$, producono le stesse componenti del rapporto C/m . Cambia solo quella parziale coincide con la portante (C).

E s. $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{7}{3}$ ecc.

Sono assenti solo le armoniche multiple di 3 (cfr. $N_2 = 3$) e la portante sarà rispettivamente la seconda, la quinta, la prima, la quarta, la settima ecc. armonica.

Il rapporto che individua una famiglia si dice in forma normalizzata se è minore od uguale ad $\frac{1}{2}$.

Nell'esempio precedente

$$\frac{C}{m} = \frac{1}{3}$$

Ogni famiglia è quindi caratterizzata da un rapporto in forma normalizzata. Se il numeratore del rapporto in forma normalizzata è 1 allora in quella famiglia la fondamentale è presente e quindi il suono risulta più armonioso. Per avere spettri diversi si ricorre a suoni di famiglie diverse.

Se il rapporto C/m è irrazionale, il suono risultante non è periodico e quindi sarà inarmonico. E' adatto quindi alla simulazione delle percussioni.

Influenza della fase iniziale

Esaminiamo come si modificano le formule sopraricavate se cambia la fase iniziale della portante o della modulante

$$s(t) = \text{sen}(C + I \text{ sen}\theta) = \sum_k J_k(I) \text{sen}(C+k\theta)$$

Il cambiamento della fase iniziale della portante equivale a sostituire a $C \rightarrow C' + \alpha$.

Si ottiene

$$s(t) = \text{sen}(C' + \alpha + I \text{ sen}\theta) = \sum_k J_k(I) \text{sen}(C' + \alpha + k\theta)$$

Ad esempio se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ equivale ad avere portante cosinusoidale

$$\begin{aligned} \cos(C' + I \text{ sen}\theta) &= \text{sen}(C' + \frac{\pi}{2} + I \text{ sen}\theta) = \\ &= \sum_k J_k(I) \text{sen}(C' + \frac{\pi}{2} + k\theta) = \sum_k J_k(I) \cos(C' + k\theta) \end{aligned}$$

Il segnale invece che in sommatoria di seni, viene scomposto in sommatoria di co seni. Quando le componenti si ribaltano attorno allo zero, non c'è inversione di fase.

Il cambiamento della fase iniziale della modulante di fase equivale a sostituire a $\theta \rightarrow \theta' + \alpha$. Si ottiene

$$s(t) = \text{sen}(C + I \text{ sen}(\theta' + \alpha)) = \sum_k J_k(I) \text{sen}(C + k(\theta' + \alpha))$$

Ad esempio, se $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\text{sen}(C + I \cos\theta') = \text{sen}(C + I \text{ sen}(\theta' + \frac{\pi}{2})) = \sum_k J_k(I) \text{sen}(C + k(\theta' + \frac{\pi}{2}))$$

Doppia modulante

Finora si è esaminato il caso in cui sia la portante che la modulante sono semplici sinusoidi. Esaminiamo ora il caso in cui il segnale modulante sia composto da due sinusoidi (fig. 30), ciascuna con il suo indice di modulazione. Ciò dà luogo alle seguenti due equazioni

$$s(t) = \text{sen}(\omega_c t + I_1 \text{ sen } \omega_1 t + I_2 \text{ sen } \omega_2 t) \quad \text{modulazione di fase}$$

$$s(t) = \text{sen} \int (\omega_c + d_1 \cos \omega_1 t + d_2 \cos \omega_2 t) dt \quad \text{corrispondente modulazione di frequenza ove } d_1 = \omega_1 I_1 \quad d_2 = \omega_2 I_2$$

Le due equazioni descrivono lo stesso segnale. Per ricavare lo spettro, consideriamo la modulazione di fase.

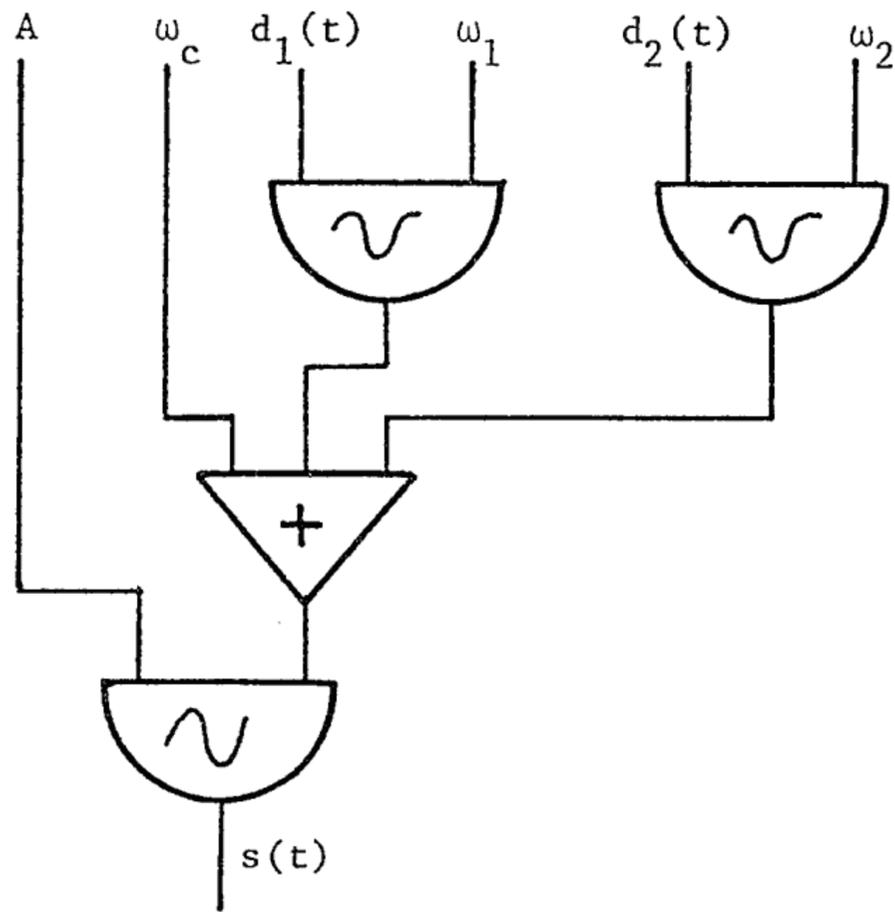


fig. 30

Posto

$$\begin{aligned}\omega_1 t &= \theta_1 \\ \omega_2 t &= \theta_2 \\ \omega_c t &= C\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}s(t) &= \text{sen}(\omega_c t + I_1 \text{sen} \omega_1 t + I_2 \text{sen} \omega_2 t) = \\ &= \text{sen}(C + I_1 \text{sen} \theta_1 + I_2 \text{sen} \theta_2)\end{aligned}$$

Posto inoltre $C_1 = C + I_2 \text{sen} \theta_2$, normale modulazione di fase con una modulante,

$$\begin{aligned}s(t) &= \text{sen}(C_1 + I_1 \text{sen} \theta_1) = \\ &= \sum J_k(I_1) \text{sen}(C_1 + k\theta_1) = \\ &= \sum_k J_k(I_1) \text{sen}(C + I_2 \text{sen} \theta_2 + k\theta_1)\end{aligned}$$

Posto ora $C_2 = C + k\theta_1$

$$= \sum_k J_k(I_1) \text{sen}(C_2 + I_2 \text{sen} \theta_2)$$

corrisponde cioè ad una modulazione di fase usando come portanti tutte le compo-

nenti generate dalla prima modulante. Sviluppando si ha

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k J_k(I_1) \sum_n J_n(I_2) \text{sen}(C_2 + n\theta_2) = \\
 &= \sum_k \sum_n J_k(I_1) J_n(I_2) \text{sen}(C + k\theta_1 + n\theta_2) = \\
 &= \sum_k \sum_n J_k(I_1) J_n(I_2) \text{sen}(\omega_c + k\omega_1 + n\omega_2)t
 \end{aligned}$$

Si hanno perciò tutte le componenti con pulsazione

$$\begin{aligned}
 |\omega_c + k\omega_1 + n\omega_2| \quad \text{con} \quad &k = 0 \pm 1 \pm 2 \dots\dots \\
 &n = 0 \pm 1 \pm 2 \dots\dots
 \end{aligned}$$

e ciascuna componente ha ampiezza $J_k(I_1)J_n(I_2)$.

Modulante composta

In generale se la modulante è composta da più componenti (fig. 31) si ha

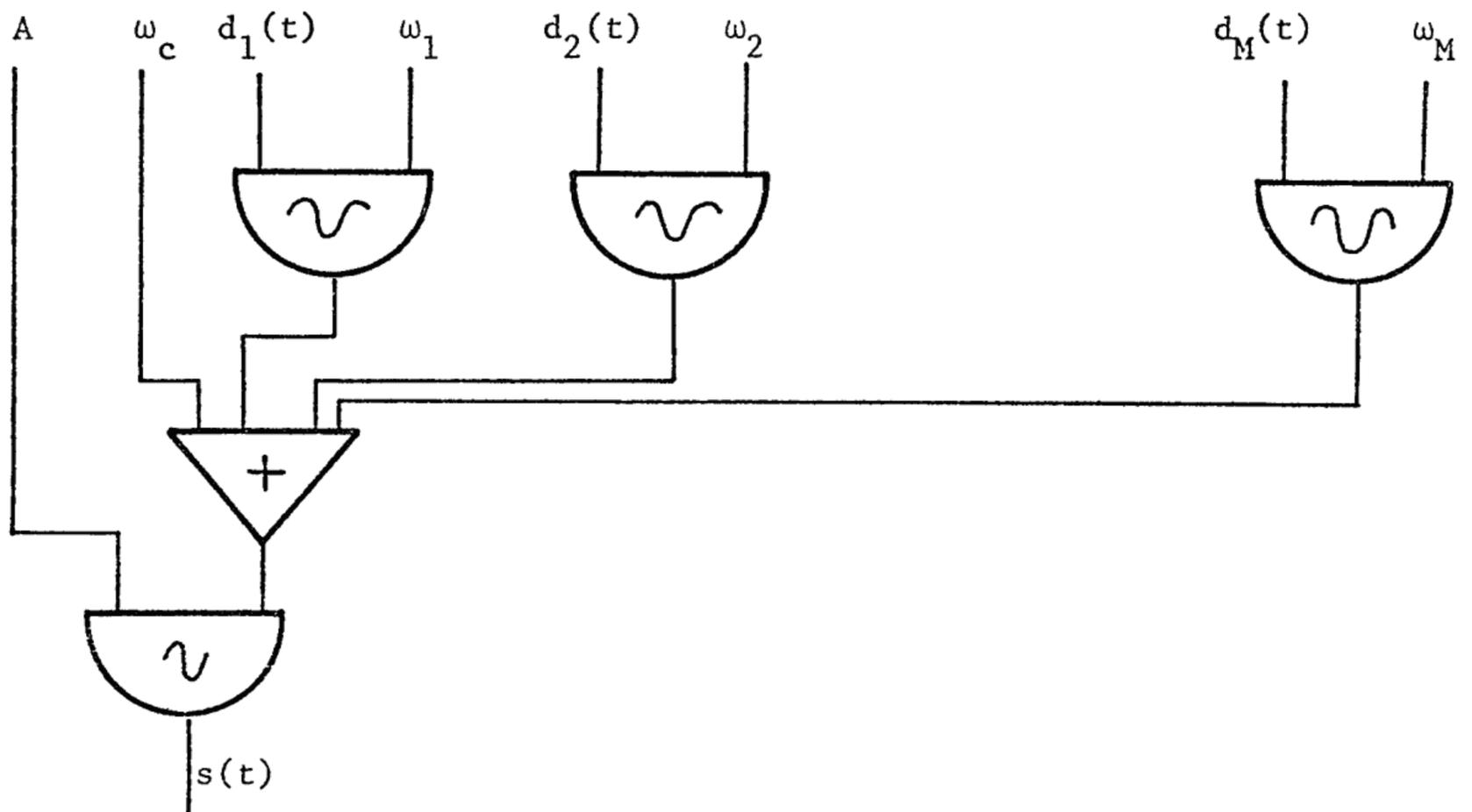


fig. 31

$$s(t) = \text{sen}(\omega_c t + \sum_{i=1}^N I_i \text{sen} \omega_i t) =$$

Applicando lo stesso procedimento di prima si ottiene

$$= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_N} J_{k_1}(I_1) J_{k_2}(I_2) \dots J_{k_N}(I_N) \text{sen}(\omega_c + k_1 \omega_1 + \dots + k_N \omega_N)$$

Si hanno cioè tutte le componenti di pulsazione

$$|\omega_c + k_1 \omega_1 + \dots + k_N \omega_N| \quad \text{con} \quad k_i = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

$$|\omega_c + \sum_{i=1}^N K_i \omega_i| \quad \text{e ampiezza} \quad \prod_i J_{k_i}(I_i)$$

Alcune di queste componenti possono coincidere come frequenza. In questo caso le rispettive ampiezze vanno sommate vettorialmente per tener conto dello sfasamento.

Se non ci sono relazioni semplici tra le varie componenti, il suono che si ottiene è quasi un rumore.

Possiamo quindi considerare due casi particolari

- modulante periodica (fig. 32)

$$\phi(t) = I_1(t) \sum_i C_i \sin i \omega_1 t$$

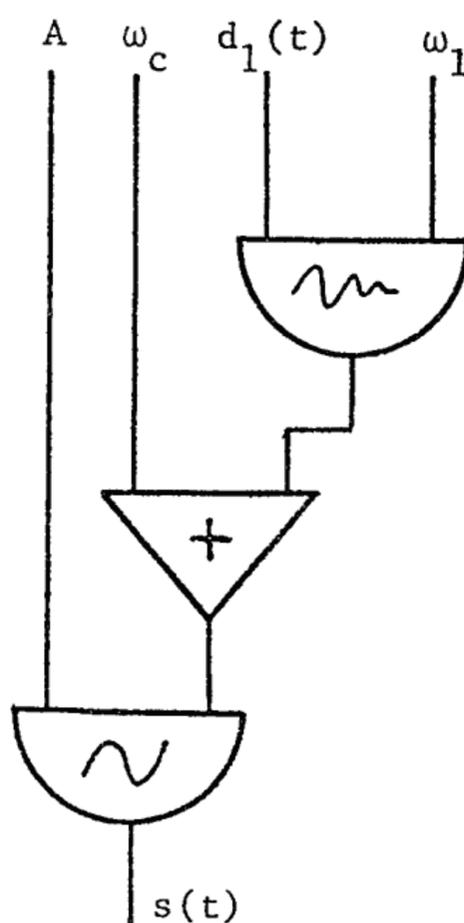


fig. 32

Dal punto di vista dello spettro del segnale prodotto equivale al caso di modulazione semplice con modulante quasi periodica. Si hanno quindi tutte le componenti con pulsazione

$$|\omega_c + \sum_i k_i (\omega_1 + i\omega_2)| \quad \text{con} \quad \begin{aligned} k_i &= 0 \pm 1 \pm 2 \dots \\ i &= 0 \pm 1 \pm 2 \dots \end{aligned}$$

Portante composta

Se la portante non è semplice, ma è costituita da una somma di componenti, l'effetto della modulazione è che ogni componente viene modulata.

Consideriamo una portante periodica (fig. 34)

$$s_c(t) = \sum_{n=1}^M a_n \text{sen}(n\omega_c t + \xi_n)$$

modulata in fase da

$$\phi(t) = I \text{sen}\omega_m t$$

Il segnale risultante è

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=1}^M a_n \text{sen}(n\omega_c t + \xi_n + \phi(t)) = \\ &= \sum_{n=1}^M a_n \text{sen}(n\omega_c t + \xi_n + I \text{sen}\omega_m t) \end{aligned}$$

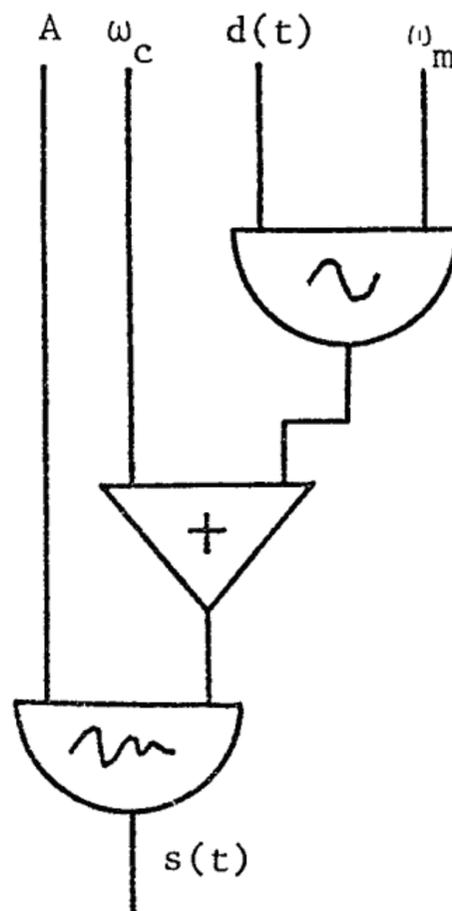


fig. 34

attorno ad ogni armonica della portante si hanno le bande laterali prodotte dalla modulazione

$$= \sum_{n=1}^M \sum_k a_n J_k(I) \text{sen} [(n\omega_c + k\omega_m)t + \xi_n]$$

Si hanno cioè tutte le componenti con pulsazione:

$$|n\omega_c + k\omega_m| \quad \text{con} \quad n = 1 \dots M \\ k = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$$

e ciascuna con ampiezza $a_n J_k(I)$.

Si osservi che spesso si hanno molte sovrapposizioni di componenti risultanti, per cui l'ampiezza complessiva va calcolata facendo la somma e tenendo conto della fase.

Nel caso in cui la portante sia quasi periodica e cioè esprimibile con

$$s_c(t) = \sum_{n=1}^M a_n(t) \text{sen}(n\omega_c t + \xi_n(t))$$

essendo $a_n(t)$ ampiezza della n-esima componente

$\xi_n(t)$ sfasamento della n-esima componente

lentamente variabili.

Il segnale modulato risulta

$$s(t) = \sum_{n=1}^M a_n(t) \text{sen}(n\omega_c t + \xi_n(t) + I \text{sen}\omega_m t) = \\ = \sum_{n=1}^M \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_n(t) J_k(I) \text{sen} [(n\omega_c + k\omega_m)t + \xi_n(t)]$$

Si hanno per ciò le stesse componenti del caso periodico ma con ampiezze variabili nel tempo. Se poi si hanno sovrapposizioni, in frequenza, di più componenti, l'ampiezza risultante varia non solo perchè varia l'ampiezza di ciascuna componente, ma anche perchè varia lo sfasamento reciproco.

Per realizzare la portante quasi periodica si ricorre a più parziali, la cui ampiezza varia lentamente nel tempo.

Due o più portanti

Nel caso che ci siano due o più portanti, si estende il ragionamento del caso di portante composta. Il risultato complessivo è la somma dell'effetto di ciascuna portante presa separatamente e modulata. E' una specie di sintesi additiva.

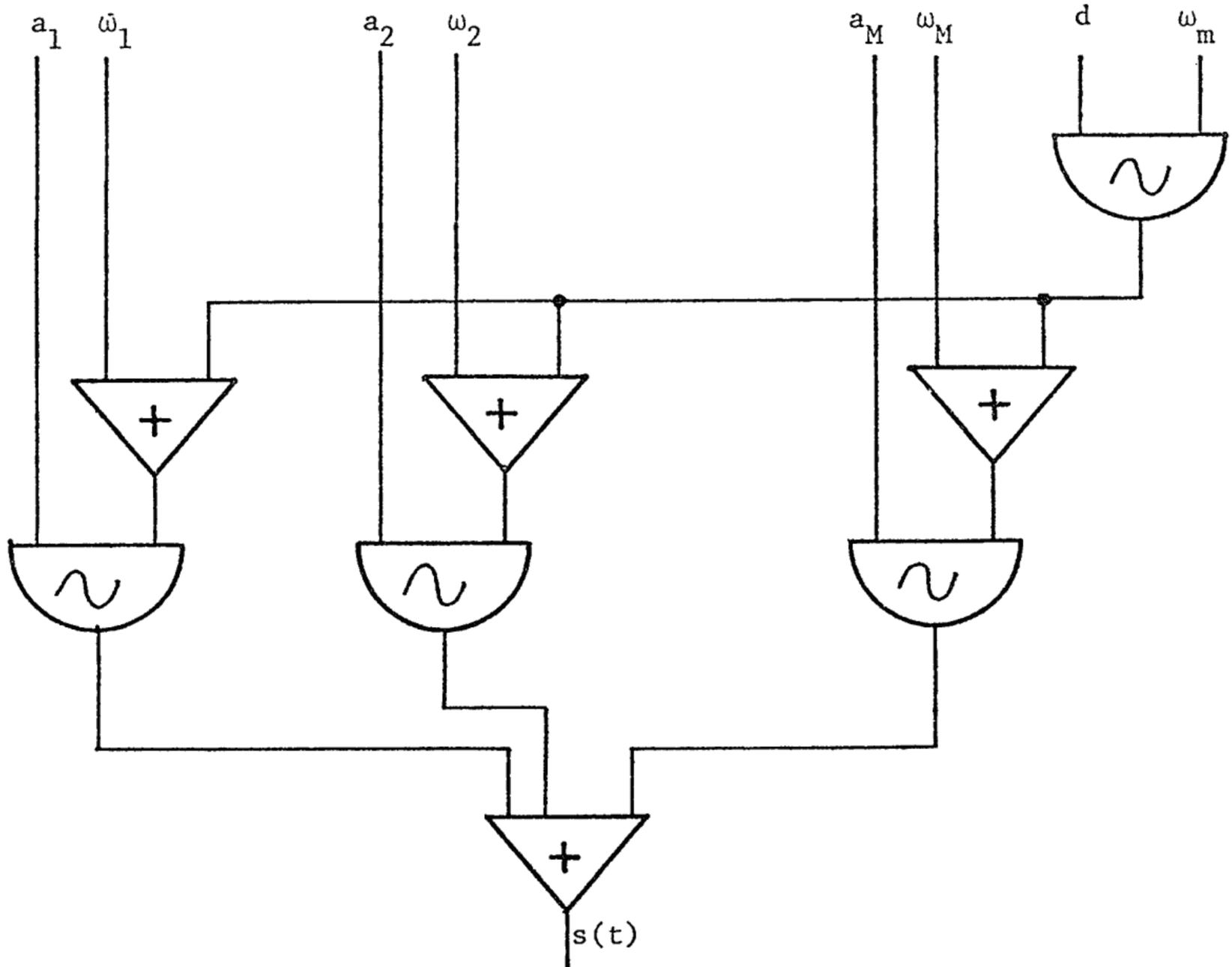


fig. 35

La rappresentazione grafica è illustrata in fig. 35.

La formula è.

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{n=1}^M a_n \text{sen}(\omega_n t + I \text{sen} \omega_m t) \\
 &= \sum_{n=1}^M \sum_k a_n J_k(I) \text{sen}(\omega_n + k\omega_m)t
 \end{aligned}$$

Gli a_n (ampiezze delle singole portanti) possono essere costanti, variabili ma uguali fra loro nel tempo, variabili nella stessa maniera e con un coefficiente di proporzionalità tra loro, variabili in modo totalmente indipendente. Per ogni caso si possono usare tecniche diverse di generazione.

Anche gli indici di modulazione di ciascuna portante possono variare in maniera diversa, in modo proporzionale o completamente libero. Se la variazione avviene in modo proporzionale per ciascuna componente, una volta generata la legge di variazione, basta moltiplicarla per i vari fattori di scala per ottenere tutti i parametri variabili. Graficamente si può rappresentare come in fig. 36 in

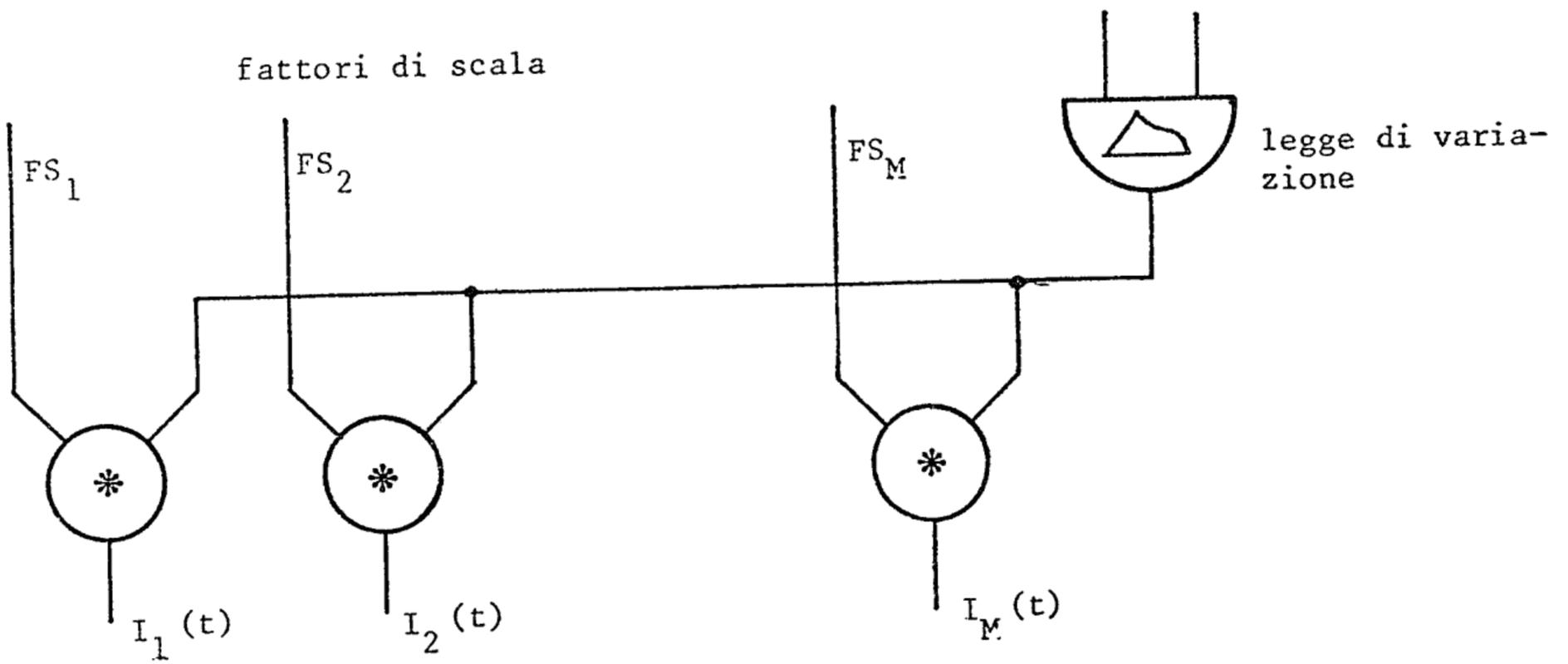


fig. 36

in cui risulta

$$I_n(t) = FS_n f(t) \quad \text{con } n=1,2,\dots,M$$

Nel caso generale, ciascuna portante ha la modulante con il suo indice che varia indipendentemente (fig. 37).

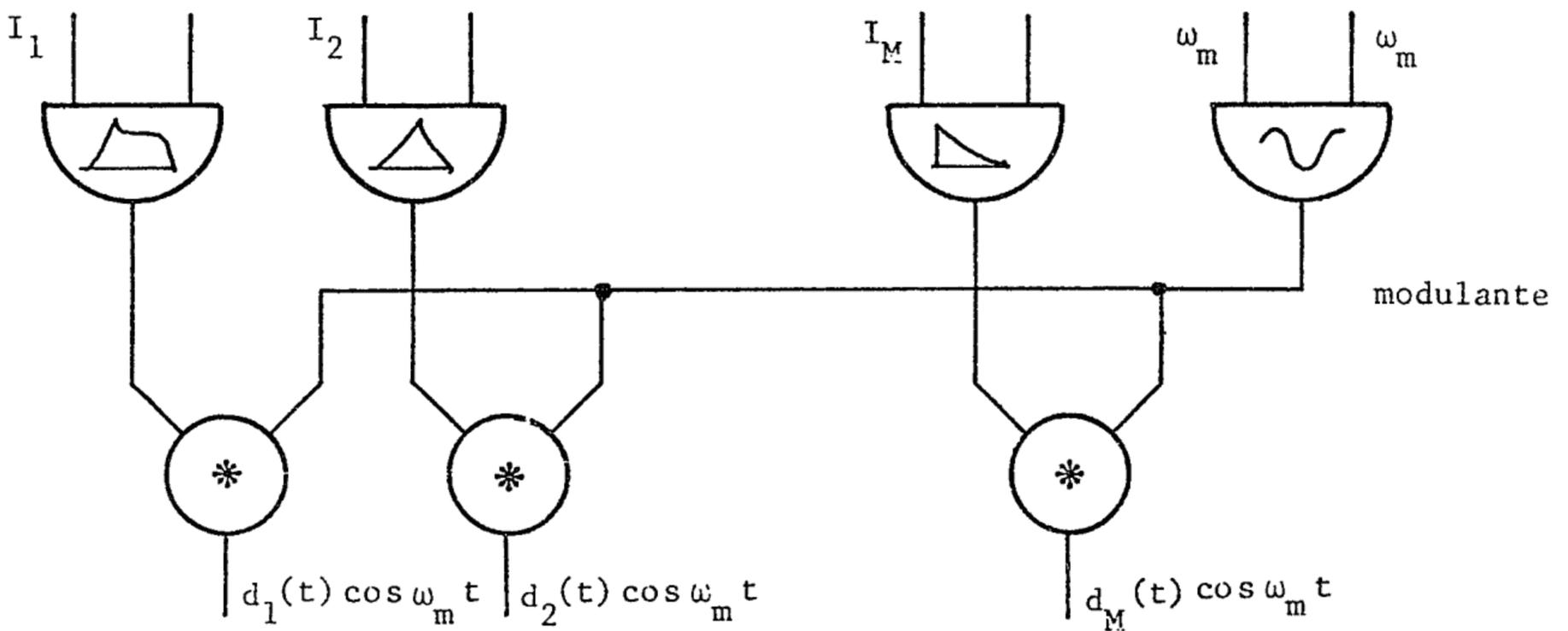


fig. 37

Nell'esempio precedente la modulante ha ampiezza 1 quando viene impiegata nella modulazione di fase, ω_m quando viene impiegata nella modulazione di frequenza. Siccome, nella simbologia grafica adottata, si modula la frequenza, si è posta l'ampiezza della modulante uguale ad ω_m . In tal caso si ottengono le deviazioni per ogni portante.

Generalizzando ulteriormente, non è detto che tutte le portanti debbano avere le modulanti con la stessa frequenza, anzi può essere diversa per ogni portante. Ciò corrisponde ad avere una somma di moduli FM separati tra loro (fig. 38). Se le varie frequenze hanno rapporti razionali tra loro vi saranno sovrapposizioni tra componenti.

Applicazioni della portante composta

Viene usata la modulante composta o la portante composta, quando lo spettro prodotto da modulante e portante semplice non è sufficiente o deve essere arricchito.

Già nella prima esposizione della FM Chowning consigliava l'uso della doppia portante per introdurre nello spettro un formante o addensamento di potenza nelle armoniche superiori. Ad esempio per ottenere uno spettro del tipo di figura 39. può essere conveniente aggiungere una portante in corrispondenza della 9^a

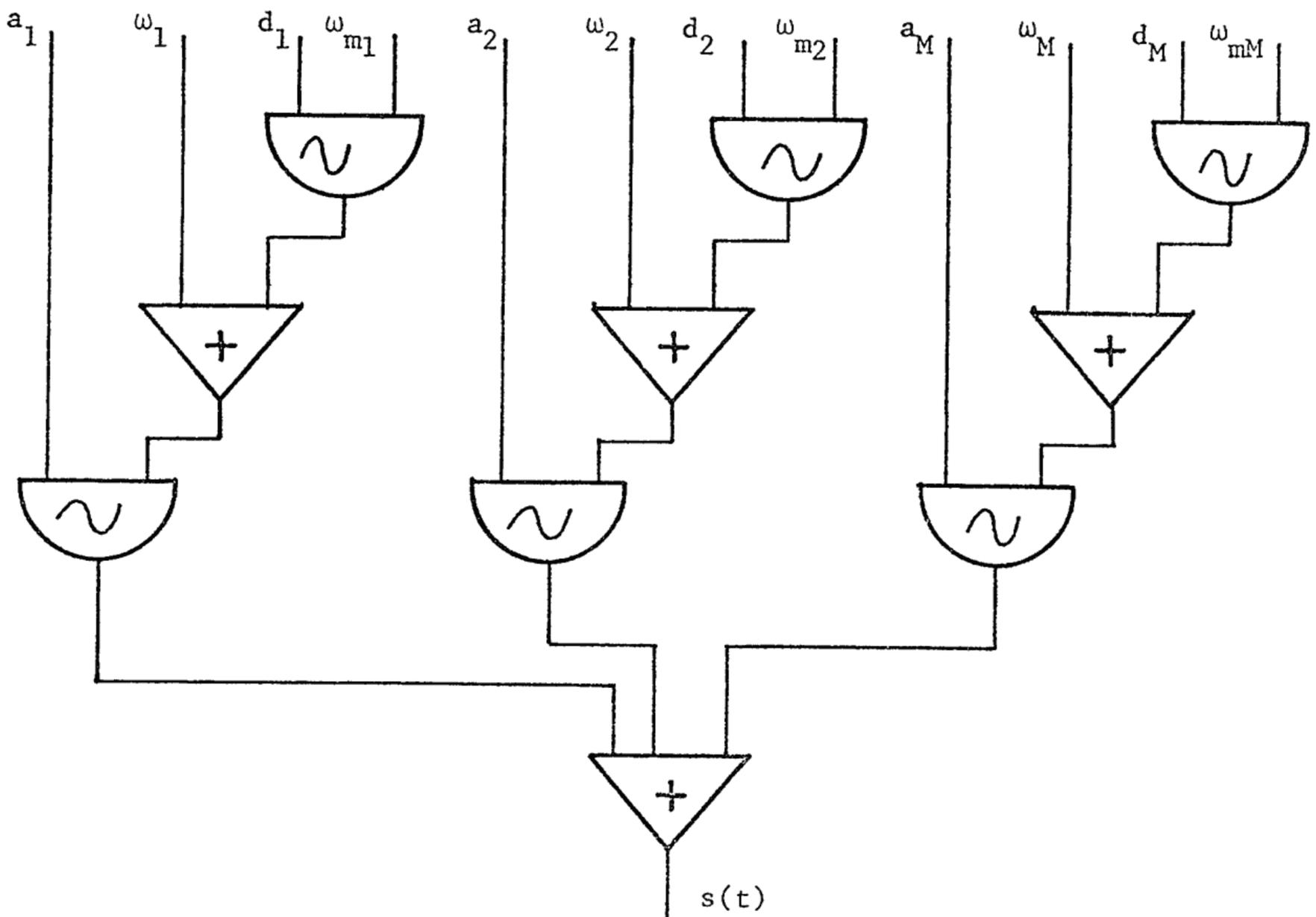


Fig. 38

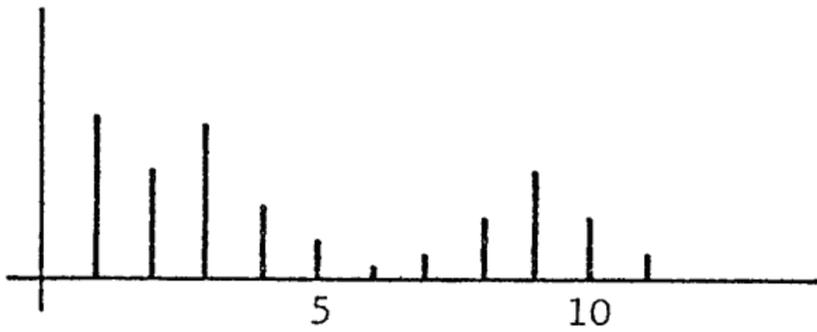


fig. 39

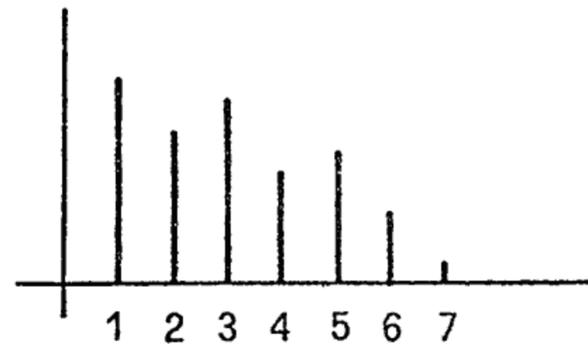


fig. 40

armonica modulata con indice circa 1 per produrvi il formante.

Se si vuol tener circa ferma la frequenza del formante al variare della fondamentale, bisognerà cambiare in maniera opportuna la posizione della portante rispetto al numero di armonica. Se ad esempio la frequenza del suono raddoppia, il formante cade tra la quarta e la quinta armonica, confondendosi quindi con lo spettro base (fig. 40). Se la frequenza si dimezza, allora la portante sarà fatta coincidere con la 18^a armonica (fig. 41). Da notare che in questo caso alcune delle armoniche superiori possono cadere nella stessa banda critica.

Con questo metodo si è scomposto lo spettro del suono da produrre in due componenti della stessa famiglia. Infatti la frequenza delle due portanti differiscono tra loro di un multiplo della frequenza modulante

$$C_2 - C_1 = k m \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si ricordi che la famiglia di suoni FM è prodotta da rapporti portante modulante del tipo

$$\left| \frac{C + k m}{m} \right|$$

Larghezza di banda

Se noi consideriamo la formula della modulazione di fase

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{sen}(\omega_c t + I(t) \text{sen} \omega_m t) = \\ &= \sum_k J_k(I(t)) \text{sen}(\omega_c + k \omega_m) t \end{aligned}$$

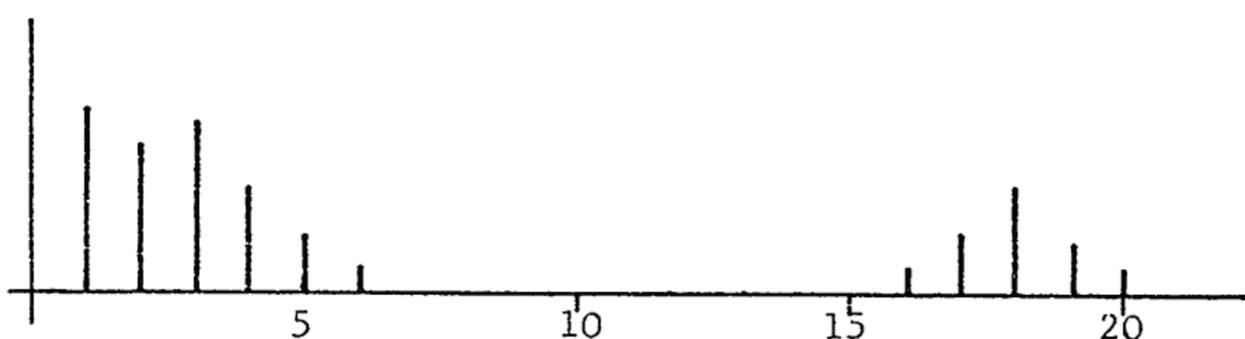


fig. 41

si vede che la struttura armonica consiste di infinite componenti di tipo sinusoidale con frequenza $\omega_c + k\omega_m$ e peso $J_k(I(t))$ con $-\infty < k < +\infty$. Quindi teoricamente la banda del segnale modulato è illimitata. In pratica una componente in un segnale può essere ignorata se il suo peso è inferiore ad una certa soglia. Generalmente si definisce la banda di un segnale FM come la larghezza dello spettro di frequenza che contiene tutte le componenti che hanno peso superiore od uguale all'un per cento dell'ampiezza del segnale non modulato.

Siccome i pesi sono dati dalle funzioni di Bessel valutate all'indice di modulazione I , basta considerare solo il comportamento delle funzioni di Bessel. Le tavole delle funzioni di Bessel mostrano che per piccoli valori dell'indice I solo poche funzioni di basso ordine sono significative. Al crescere dell'indice, cresce il numero e l'ordine delle funzioni aventi ampiezza significativa. Lo spettro diventa così sempre più ricco e la banda più larga. E' questa infatti la caratteristica principale dei suoni FM e che all'ascolto risulta più determinante nella qualità del suono. Se infatti si impiega nella sintesi la tecnica FM con indice variabile, il suono ottenuto è caratterizzato, e quindi riconoscibile, dalla larghezza di banda che si allarga e si stringe e dal fatto che le ampiezze delle singole componenti non hanno andamento omogeneo con questa variazione. Se un suono FM è prodotto con indice fisso, allora la banda e lo spettro sono fissi; è quindi meno riconoscibile la tecnica di sintesi.

Esistono varie formule pratiche che danno il numero di bande laterali significative

$$M = I + 2.4 \cdot I^{0.27}$$

oppure

$$M = I + \frac{1}{2} \quad \text{per valori di } I \text{ piccoli}$$

ove M = numero di bande laterali significative

I = indice di modulazione

Nelle formule sopra calcolate per gli spettri le sommatorie delle componenti

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{+\infty} J_k(I) \text{sen} (\omega_c + k\omega_m)t = \\ & = \sum_{-M}^M J_k(I) \text{sen} (\omega_c + k\omega_m)t \end{aligned}$$

possono essere calcolate invece che da $-\infty$ a $+\infty$, da $-M$ a $+M$, in cui M dipende da I . Nel caso di modulante composta, la cui formula è

$$s(t) = \text{sen}(\omega_c + \sum_{i=1}^N J_i \text{sen} \omega_i t) =$$

$$= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_N} J_{k_1}(I_1) J_{k_2}(I_2) \dots J_{k_N}(I_N) \text{sen}(\omega_c + k_1 \omega_1 + \dots + k_N \omega_N) t$$

ciascuna sommatoria, invece che essere estesa per tutti gli interi, può essere fatta tra $-M_i$ e $+M_i$ in cui M_i dipenda da I_i , indice di modulazione della i -esima componente della modulante.

Inoltre ciascuna componente ha peso dato dal prodotto di N funzioni di Bessel

$$J_{k_1}(I_1) J_{k_2}(I_2) \dots J_{k_N}(I_N) .$$

Ciascuna funzione è ≤ 1 per cui diminuisce ancora di molto il numero di componenti significative.

Potenza

Dato il segnale modulato in fase calcoliamo la potenza istantanea (specificata)

$$s(t) = \text{sen}(C + I \text{sen} \theta) = \sum J_k(I) \text{sen}(C + k\theta)$$

$$p(t) = s^2(t) = \text{sen}(C + I \text{sen} \theta)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \cos(2C + 2I \text{sen} \theta)] =$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \sum_k J_k(2I) \cos(2C + k\theta)]$$

La potenza media (specificata)

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T p(t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \sum_k \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T J_k(2I) \cos(2C + k\theta) dt]$$

Si noti che il valor medio dei termini che variano sinusoidalmente è nullo. Per cui l'unico termine diverso da zero sarà quello per cui $\cos(2C + k\theta)$ non dipende dal tempo.

Se poniamo

$$C = \omega_c t + \phi_c$$
$$\theta = \omega_m t + \phi_m$$

$$\cos(2C+k\theta) = \cos(2\omega_c t + k\omega_m t + 2\phi_c + k\phi_m)$$

La condizione per cui il valor medio non sia nullo è che $2\omega_c + k\omega_m = 0$.

Se

$$\frac{\omega_c}{\omega_m} = \frac{N_1}{N_2} \quad \omega_c = N_1 \omega_o \quad \omega_m = N_2 \omega_o$$

la condizione diventa

$$2N_1 \omega_o + kN_2 \omega_o = 0$$

da cui

$$k = -\frac{2N_1}{N_2} = \frac{-2\omega_c}{\omega_m}$$

ma k deve essere intero, ed essendo $\frac{N_1}{N_2}$ irriducibile, l'unica condizione che de termina una componente costante nel tempo è N_2 uguale ad 1 od a 2.

$$\text{Se } N_2 = 1 \quad k = -2N_1$$

$$\text{Se } N_2 = 2 \quad k = -N_1 \quad (N_1 \text{ dispari})$$

La componente in continua diminuisce la potenza di

$$\frac{1}{2} J_k(2I) \cos(2\phi_c + k\phi_m)$$

$$P_m = \frac{1}{2} [1 - J_k(2I) \cos(2\phi_c + k\phi_m)]$$

Esempio:

caso normale - portante: seno

$$\phi_c = 0$$

- modulante fase: seno

$$\phi_m = 0$$

$$P_m = \frac{1}{2} [1 - J_k(2I)]$$

- portante:

$$\phi_c = \frac{\pi}{4}$$

- modulante fase: seno

$$\phi_m = 0$$

$$P_m = \frac{1}{2} [1 - J_k(2I) \cos(\frac{\pi}{2})] = \frac{1}{2}$$

Se le relazioni precedenti non sono soddisfatte esattamente non si ha sovrapposizione di componenti, per cui la potenza media, in un tratto sufficientemente lungo di tempo è costante e pari a $\frac{1}{2}$. Nell'ascolto si sente una fluttuazione, che può essere spiegata pensando ad un battimento fra le componenti prodotte.

Consideriamo

$$\omega_c = \frac{N_1}{N_2} \omega_m + \varepsilon \quad \text{con } N_2 = 1 \text{ oppure } N_2 = 2$$

ε piccola rispetto ω_m

Se $\varepsilon = 0$ la condizione che determina il termine della potenza che non dipende dal tempo è

$$2\omega_c + k\omega_m = 0 \quad k = -\frac{2N_1}{N_2}$$

Per questo valore di k la potenza ha un termine di pulsazione

$$2\omega_c - \frac{2N_1}{N_2} \omega_m = \frac{2N_1}{N_2} \omega_m + 2\varepsilon - \frac{2N_1}{N_2} \omega_m = 2\varepsilon$$

piccola rispetto ω_m . Se è dell'ordine degli hertz il suono viene quindi sentito con intensità variabile

$$P = \frac{1}{2} [1 - J_k(2I) \cos(2\varepsilon t + 2\phi_c + k\phi_m)]$$

esempio

$$\omega_c = 301 \text{ Hz} \quad \omega_m = 200 \text{ Hz} \quad \varepsilon = 1 \text{ Hz} \quad k = -3 \quad \phi_c = 0 \quad \phi_m = 0$$

$$P = \frac{1}{2} [1 - J_{-3}(2I) \cos(4\pi t)]$$

Si noti che l'ampiezza della fluttuazione di potenza dipende dall'indice di modulazione e da k .

Se $J_k(2I) = 0$, la potenza è costante. I battimenti fra le varie componenti si compensano. Si ha il cosiddetto battimento del secondo tipo dovuto a variazione periodica della forma d'onda e non dell'ampiezza.

CONCLUSIONE

Sono state descritte le principali tecniche di sintesi del suono impiegato per scopi musicali e sono stati discussi i vantaggi e svantaggi di ciascun metodo, cercando di mettere in evidenza le possibilità applicative.

Ancora molto lavoro resta da fare per esplorare a fondo le varie tecniche, soprattutto quelle non lineari, e per sviluppare criteri e mezzi, teorici e pratici, per scegliere i parametri più opportuni per produrre i suoni desiderati. La stessa analisi di Fourier, che è la forma più usata per rappresentare i suoni, si è rivelata non sufficiente per descrivere in maniera utile e significativa l'andamento dinamico dei suoni. Vanno quindi elaborati e applicati strumenti concettuali più perfezionati, che tengano conto dell'aspetto aleatorio dei suoni.

Per quanto riguarda il musicista si vuol porre qui in evidenza che ogni nuova tecnica si presenta come un nuovo strumento. Egli deve quindi sperimentare a lungo per poter ricavare quella padronanza e quella sensibilità nella scelta dei parametri che gli consentano di giungere a dei risultati rilevanti dal punto di vista musicale e non solo da quello acustico. E in questo campo non si può aver fretta. Solo attraverso un lungo e duro lavoro si può giungere a dei risultati validi ed ad una consapevolezza dei mezzi impiegati, altrimenti si deve rinunciare a nuove possibilità ed usare pedestremente i risultati altrui. Come sempre, di fronte alle novità, non esiste ancora, e per un certo tempo non esisterà, una teoria ed una prassi musicale adatta ad orientare chi vuol comporre musica per elaboratore. Ciascuno deve costruirselo con il suo impegno personale.

RIFERIMENTI

- H.G. ALLES: "Music Synthesis Using Real Time Digital Techniques", Proc. IEEE, vol. 68, n. 4, p. 436-449, 1980.
- G.L. CARIOLARO: "Teoria dei segnali determinati", ed. Patron, 1977.
- J.A. MOORER: "Signal Processing Aspects of Computer Music: A Survey", Proc. IEEE vol. 65, n. 8, p. 1108-1132, April 1977.
- M.V. MATHEWS: "The technology of computer music", ed. Mit Press, 1969.
- A.V. OPPENHEIN, R.W. SHAFER: "Digital Signal Processing", ed. Prentice-Hill, 1975.

Sintesi granulata

- C. ROADS: "Automatic Granular Synthesis of Sounds", Computer Music Journal, p. 61-

-62, vol. II, n. 2, 1978.

Forma d'onda fissa

B. MAILLART: "Les distorsions de Music V", Cahiers recherche/musique, n. 3, p. 207-246, 1977.

Sintesi additiva

J. BEAUCHAMP: "A computer System for Time-Variant Harmonic Analysis and Synthesis of Musical Tones", in Music by Computer, H. Van Foerster and J. Beauchamp, Eds (J. Wiley, New York, pp. 19-62, 1969).

J.C. RISSET: "An Introductory Catalog of Computer Synthesized Sounds", Bell Laboratories, Murray Hill, n.J. 1969.

J. RISSET, M. MATHEWS: "Analysis of Musical Instrument Tones", Physical Today, vol. 22, n. 2, p. 23-30, 1969.

VOSIM

W. KAEGI: "A Minimum Description of the Linguistic Sign Repertoire (part 1)", Interface, vol. 2, pp. 141-156, 1973.

W. KAEGI: "A Minimum Description of the Linguistic Sign Repertoire (part 2)", Interface, vol. 3, pp. 132-158, 1974.

W. KAEGI, S. TEMPELAARS: "VOSIM: - A New Sound Synthesis System", J. Audio Eng. Soc., vol. 26, n. 6, pp. 418-424, 1978.

S. TEMPELAARS: "The VOSIM Signal Spectrum", Interface, vol. 6, pp. 81-96, 1976.

E. DE POLI, G. DE POLI: "Identificazione di parametri di un oscillatore VOSIM a partire da una descrizione spettrale", Atti del 3° Coll. di Inf. Mus., p. 161-177, 1979.

Sintesi sottrattiva

J. M. CHOWNING: "The Simulation of Moving Sound Sources", J. Audio Eng. Soc., vol. 19, n. 1, p. 2-6, 1971.

J.A. MOORER: "The use of the Phase Vocoder in Computer Music Application", J. Audio Eng. Soc., vol. 26, n. 2, p. 42-49, 1978.

J.A. MOORER: "The use of Linear Prediction of Speech in Computer Music Application" J. Audio Eng. Soc., vol. 27, n. 3, p. 134-14L, 1979.

J.A. MOORER: "About this Reverberation Business", Rapp. IRCAM, n. 17/78.

L.R. RABINER, B. GOLD: "Theory and Application of Digital Signal Processing", Prentice-Hall, 1975.

Distorsione non lineare

D. ARFIB : "Digital Synthesis of Complex Spectra by Means of Multiplication of Nonlinear Distorted Sine Waves", J. Audio Eng. Soc., vol. 27, n. 10, p. 757 - 768, ott. 1979.

J. BEAUCHAMP: "Brass Tone Synthesis by Spectrum Evolution Matching with Nonlinear Functions", Comp. Mus. Jour., vol. 3, n. 2, 1979.

J. DASHOW: "Three Methods for the Digital Synthesis of Chordal Structures with non-harmonic partials", Interface, vol. 7, n. 2-3, p. 69-94, 1978.

M. LE BRUN: "Digital Waveshapping Synthesis", J. Audio Eng. Soc., vol. 27, n. 4 , p. 250-265, nov. 1979.

J.A. MOREER: "The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Discreta Summation Formulas", J. Audio Eng. Soc., vol. 24, p. 717-727, nov. 1976.

P. REINHARD, F. ROPELATO, A. VECELLI: "Distorsione non lineare tramite polinomi", relazione d'esame, Istituto di Elettrotecnica e di Elettronica, Università di Padova, 1979.

G. WINHAN, K. STEIGLITZ: "Input Generators for Digital Sound Synthesis", J. Acoust. Soc. Am., vol. 47, p. 665-666, $\frac{1}{2}$ 1970.

Modulazione di frequenza

J.M. CHOWNING: "The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation", J. Audio Eng. Soc., vol. 21, n. 7, p. 526-534, sett. 1973.

M.S. CORRINGTON: "Variation of Bandwidth with Modulation Index in Frequency Modulation", Proc. IRE, p. 1013-1020, 1947.

J.M. JUSTICE: "Analytic Signal Processing in Music Computation", IEEE Trans. ASSP, vol. 27, n. 6, p. 670-684, dic. 1979.

M. LE BRUN: "A Derivation of the Spectrum of EM with Complex Modulating Wave", Comp. Music Journ., vol. 1, n. 4, p. 51-52, nov. 77.

B. TRUAX: "Organizational Techniques for C:M Ratios in Frequency Modulation", Comp. Music Journ., vol. 1, n. 4, p. 39-45, nov. 1977.