Osservazione (3).

Dal Teorema (2) segue che R_m è una famiglia diadica (cfr. [4] pag. 151) e risulta

$$R_m = \bigcup_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

Poiché $(I^n)_n$ è una successione decrescente di chiusi non vuoti il cui diametro tende a zero, per un noto teorema (cfr. [4] pag. 150), $\bigcap_n I^n$ si riduce ad un punto, e quindi appare evidente (come del resto è già noto) che R_m ha la cardinalità del continuo. Tale risultato è più "forte" dell'affermazione: "R_m è una famiglia diadica", perché, data la caratterizzazione di tali famiglie (cfr. [4] pag. 154), sarebbe come affermare semplicemente che R_m è un compatto: ma ciò è ovvio, dato che R_m è perfetto. D'altra parte esistono perfetti che non sono né intervalli chiusi, né unione finita di intervalli chiusi, né insiemi tipo Cantor (in nessuna parte). Ad esempio si consideri

$$P = \{0\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} I_n \qquad \text{con} \quad I_n = \left[\frac{1}{n} - \delta_n, \frac{1}{n} + \delta_n\right] \quad \text{e} \quad \delta_n = 1/3n(n+1) .$$

5 - Conseguenze del Teorema (2) per le misure. -

Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di parti di X ed $m : \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ è una misura, allora R_m è sempre chiuso (cfr. [2]), ma può essere finito o no. Considerato il secondo caso e detti $y_1, y_2, \ldots$ gli atomi di X, che possiamo considerare come punti di X, l'insieme $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ è al più numerabile, perché per ipotesi $m(X) < +\infty$. Posto $Z=X-Y$, risulta m non atomica su Z e quindi continua (nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione finita di X in insiemi $X_k \in \mathcal{A}$ tali che $m(X_k) < \varepsilon$). Pertanto il codominio di m su Z sarà tutto $[0,m(Z)]$.

Ne segue:

$$(7) \qquad R_m = [0,m(Z)] + \{0,m(y_1)\} + \{0,m(y_2)\} + \ldots = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} [\lambda, \lambda + m(Z)]$$

dove

(8) $$\Lambda = \{\sum_{n\in A} m(y_n)\ ;\ A \subset \mathbb{N}\}\ .$$

L'inclusione $R_m \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} [\lambda,\lambda+m(Z)]$ è evidente. L'inclusione opposta si prova come segue: se $x\in[\lambda,\lambda+m(Z)]$, allora $x-\lambda \in [0,m(Z)]$ e perciò esiste $B \subset Z$, con $B \in \mathcal{A}$, tale che $m(B) = x-\lambda$. Essendo $\lambda\in\Lambda$ esiste $A \subset Y$ tale che $m(A) = \lambda$, e poiché $A\cap B = \emptyset$ risulta $m(A \cup B) = \lambda+(x-\lambda) = x$.

Poniamo $a = \sum_{n=1}^{\infty} m(y_n)$. Dalla (7) e (8) si vede che, nel caso in cui gli atomi sono in numero finito, R_m è unione finita di intervalli chiusi, mentre nel caso in cui gli atomi sono un'infinità numerabile, si hanno i seguenti casi:

a) se $\Lambda = [0,a]$, allora $R_m = [0,a+m(Z)] = [0,m(X)]$

b) Se Λ è unione finita d'intervalli disgiunti, oppure è un insieme tipo Cantor ed è $m(Z) > 0$, allora R_m è unione finita d'intervalli chiusi. Se p è il primo indice per cui vale la (5) ed è $m(Z) \geq a_1 + \ldots + a_{p-1} + 2a_p - 1$, dove $a_k=m(y_k)$, allora $R_m = [0,m(X)]$.

In breve possiamo dire:

Proposizione (2). Se m è una misura non negativa e limitata sulla σ-algebra $\mathcal{A}$ di parti di X, allora R_m è finito, o coincide con $[0,m(X)]$, o è unione finita d'intervalli chiusi, ed è un insieme tipo Cantor solo nel caso in cui $m(Z)$ è uguale a zero, cioé è nulla la componente continua.

Questo enunciato è più esauriente del noto risultato richiamato col teorema (1).

6 - Conseguenze del Teorema (2) per le masse. -

Sia $m : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty)$ finitamente additiva e sia R_m infinito. E' noto (cfr. [3] Teorema (3.3) che esiste $\{X_n \subset X;\ x \in \mathbb{N}\}$ partizione di X, con $m(X_n) > 0$, su cui m è numerabilmente additiva. Considerata la σ-algebra $\mathcal{A}$ generata da $\{X_n; n\in\mathbb{N}\}$, m risulta numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$. Osservato che:

$$\mathcal{A} = \{\bigcup_{n\in A} X_n\ ;\ A \subset \mathbb{N}\}$$