3 - Esempi.

a) Data la serie

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \qquad \text{si ha} \qquad R_m = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

b) Poniamo $a_k = \dfrac{2}{3^k}$ per $k = 1,2,\ldots,n$ e

$$a_k = \frac{1}{3^n} \frac{1}{2^{k-n}} \qquad \text{per} \quad k = n+1, n+2, \ldots \;.$$

Se S è l'insieme di tutte le possibili somme che si possono formare con i primi n termini della serie, il codominio R_m sarà

$$R_m = \left[0, \frac{1}{3^n}\right] \cup \bigcup_{s \in S} \left[s, s + \frac{1}{3^n}\right]$$

cioé esattamente l'unione di 2^n intervalli aventi la stessa ampiezza.

c) Se $b > 2$, basta porre $a_n = \dfrac{b-1}{b^n}$ per avere la (5) per ogni n.

In particolare per $b=3$ si ha come R_m l'insieme di Cantor.

Se si vuole una serie i cui termini con indice dispari verificano la (5), mentre quelli con indice pari verificano la (6), basta porre $a_1 > \dfrac{1}{2}$ e

$$a_{n+1} = \left[1-(a_1+a_2+\ldots+a_n)\right] - \alpha \quad \text{con} \qquad \alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \\[2ex] \dfrac{2}{3} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Es. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{2^2\, 3^2} + \dfrac{1}{2.3^2} + \dfrac{1}{2^3 \cdot 3^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-2}\, 3^n} + \dfrac{1}{2^n\, 3^n} + \ldots .$

d) Oltre al caso banale $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ la cui misura associata dà lo sviluppo diadico dell'intervallo $[0,1]$, si può considerare il caso $a_n = \dfrac{b-1}{b^n}$ con $1<b\leq 2$.