2. Caratterizzazione di R_m.

Possiamo limitarci a supporre che sia $(a_n)_n$ decrescente e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$.

Costruiamo delle partizioni di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ via via più fini nel modo seguente.

Sia

$$N_1 = \{A \subseteq \mathbb{N} : 1 \in A\} \quad \text{ed} \quad N_o = \mathcal{P}(\mathbb{N}) - N_1$$

Successivamente definiamo:

$$N_{11} = \{A \in N_1 : 2 \in A\} \quad , \; N_{10} = A \in N_1 : 2 \notin A\}$$

$$N_{01} = \{A \in N_o : 2 \in A\} \quad , \; N_{oo} = \{A \in N_o : 2 \notin A\}$$

Al passo n-mo ogni $N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ con $\alpha_k \in \{0,1\}$ verrà suddiviso in :

$$N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 1} = \{A \in N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} : n+1 \in A\}$$

$$N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 0} = \{A \in N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} : n+1 \notin A\}$$

Posto $A^1 = A$ e $A^o = \mathbb{N} - A$ si ha:

$$N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \{A \subseteq \mathbb{N} : k \in A^{\alpha_k} \quad \text{per} \quad k = 1,2,\dots n\}$$

Risulta evidentemente

$$A \in N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \leq m(A) \leq 1 - \sum_{k=1}^{n} (1-\alpha_k) a_k \; ;$$

pertanto posto

$$I^n_{\alpha_1 \alpha \dots \alpha_n} = \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \, , \, 1 - \sum_{k=1}^{n} (1-\alpha_k) a_k\right]$$

vale l'inclusione

$$m(N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}) \subset I^n_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

e gli estremi dell'intervallo chiuso $I^n_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ appartengono ad $m(N_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n})$.

Poiché risulta, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato,

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \bigcup_{(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \in \{0,1\}^n} N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

si ha

(1) $$R_m = \cup\, m(N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) \subset \cup\, I^n_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$$

dove l'unione è estesa a tutte le $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \{0,1\}^n$ corrispondenti all'n fissato.

La (1) vale per ogni n, pertanto se indichiamo con P_n tale unione, si ha

(2) $$R_m \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n = P.$$

Osservato che, per costruzione

$$I^{n+1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0} \cup I^{n+1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1} \subset I^n_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

si ha che $(P_n)_n$ è una successione di pluriintervalli chiusi e descrescenti.

Se $x \in P$ allora $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \{0,1\}^n : x \in I^n_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ e poiché gli estremi dell'intervallo sono elementi di R_m e l'ampiezza di $I^n_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ è $1 - \sum_{k=1}^{n} a_k$, si ha: per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists y \in R_m$ tale che $|x-y| < \varepsilon$, cioé $x \in \bar{R}_m$ e quindi

(3) $$P \subset \bar{R}_m \quad .$$

Ma essendo m numerabilmente additiva sula σ-algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, R_m è chiuso (cfr. [1] e [2]) e quindi si ha il seguente

<u>TEOREMA</u> (2). $R_m = P$.

Si osservi che ogni plurintervallo P_n è simmetrico rispetto ad $\frac{1}{2}$ e contiene sia 0 che 1: R_m è il limite di una successione di pluriintervalli chiusi e decrescenti, formati da intervalli chiusi non degeneri.

Osserviamo che da

$$a_1+a_2+\ldots+a_n < 1 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

segue che

(4) $$a_n < 1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \ .$$

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si possono distinguere le due seguenti alternative:

(5) $$a_n > \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 1 - (a_1 + \ldots + a_n) \qquad \text{e quindi}$$

(5)' $$a_n > \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)$$

oppure

(6) $$a_n \leq \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) \ .$$

La (4), valida sempre, ci dice che l'intervallo $I^n_{0\ldots 01}$ ed il suo simmetrico $I^n_{11\ldots 10}$ (non solo sono non vuoti ma) hanno la cardinalità del continuo.

La (5) ci dice che gli intervalli successivi $I^n_{00\ldots 0}$ e $I^n_{00\ldots 01}$ (ed i loro simmetrici rispetto a $\frac{1}{2}$) sono disgiunti.

Possiamo pertanto enunciare il seguente

TEOREMA (3).

a) Se la (5) vale per almeno un n, R_m non è connesso e precisamente gli intervalli aperti $(1-(a_1+\ldots+a_n),a_n)$ e $(1-a_n,a_1+\ldots+a_n)$ hanno intersezione vuota con R_m

b) Se la (5) vale solo per un numero finito di n, allora R_m è unione finita di intervalli chiusi

c) Se la (5) vale per infiniti valori di n (non necessariamente tutti), allora R_m è un insieme tipo Cantor

d) Se la (6) vale per ogni n allora $R_m = [0,1]$.

Si osservi che nel caso d) si ha anche: $P_n = [0,1]$ per ogni n.