SUL CODOMINIO DI MASSE E MISURE DI PROBABILITA'

E. Barone (o)

1- Introduzione. -

Data la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, convergente ad a, è noto che, posto $m(A) = \sum_{n\in A} a_n$ per $A \subset \mathbb{N}$, m definisce una misura (limitata: in particolare, se $a = 1$, una misura di probabilità) su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$). Se si suppone che $a_n > 0$ per ogni n, è altresì noto che, detto $R_m = m(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ il codominio di m, R_m è un sottoinsieme perfetto di $[0,a]$. Precisamente si ha:

Teorema (1). - Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di parti di X ed $m : \mathcal{A} \to [0,m(X)]$ è una qualunque misura limitata (numerabilmente additiva) su $\mathcal{A}$, allora R_m è finito o perfetto.

Tale informazione sul codominio di m, che può essere riguardata come una conseguenza di risultati dovuti a Kai Rander Buch, P.R. Halmos, A.Sobczgk e P.C.Hammer (cfr. rispettivamente [1],[2],[3]), in alcuni casi non è del tutto esauriente. Ad esempio, nel caso qui considerato di misura definita mediante una serie, non consente di rispondere alla domanda: sotto quali condizioni sulle a_n risulta $R_m = [0,a]$? Oppure: quali valori di $[0,a]$ sono esclusi da R_m? Questo tipo di informazione è importante anche nelle applicazioni, essendo legata in modo evidente al problema della valutazione (anche soggettiva) delle probabilità.

In questo lavoro ci proponiamo di caratterizzare pienamente R_m quando m è una misura finita (paragrafi 2-5), e nella parte finale (paragrafo 6) mostriamo che tale caratterizzazione consente anche di ottenere informazioni sul codominio delle masse, cioé delle funzioni d'insiemi limitate e finitamente additive.

(o) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del CNR.

Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica - Via Arnesano;I - 73100 Lecce -