# SUL CODOMINIO DI MASSE E MISURE DI PROBABILITA'

E. Barone (o)

## 1- Introduzione. -

Data la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, convergente ad $a$, è noto che, posto $m(A) = \sum_{n\in A} a_n$ per $A \subset \mathbb{N}$, $m$ definisce una misura (limitata: in particolare, se $a = 1$, una misura di probabilità) su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$). Se si suppone che $a_n > 0$ per ogni $n$, è altresì noto che, detto $R_m = m(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ il codominio di $m$, $R_m$ è un sottoinsieme perfetto di $[0,a]$. Precisamente si ha:

Teorema (1). - Se $\mathcal{A}$ è una $\sigma$-algebra di parti di $X$ ed $m : \mathcal{A} \to [0,m(X)]$ è una qualunque misura limitata (numerabilmente additiva) su $\mathcal{A}$, allora $R_m$ è finito o perfetto.

Tale informazione sul codominio di $m$, che può essere riguardata come una conseguenza di risultati dovuti a Kai Rander Buch, P.R. Halmos, A.Sobczgk e P.C.Hammer (cfr. rispettivamente [1],[2],[3]), in alcuni casi non è del tutto esauriente. Ad esempio, nel caso qui considerato di misura definita mediante una serie, non consente di rispondere alla domanda: sotto quali condizioni sulle $a_n$ risulta $R_m = [0,a]$? Oppure: quali valori di $[0,a]$ sono esclusi da $R_m$? Questo tipo di informazione è importante anche nelle applicazioni, essendo legata in modo evidente al problema della valutazione (anche soggettiva) delle probabilità.

In questo lavoro ci proponiamo di caratterizzare pienamente $R_m$ quando $m$ è una misura finita (paragrafi 2-5), e nella parte finale (paragrafo 6) mostriamo che tale caratterizzazione consente anche di ottenere informazioni sul codominio delle masse, cioé delle funzioni d'insiemi limitate e finitamente additive.

---

(o) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del CNR.

Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica - Via Arnesano;I - 73100 Lecce -

2. Caratterizzazione di $R_m$.

Possiamo limitarci a supporre che sia $(a_n)_n$ decrescente e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$.

Costruiamo delle partizioni di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ via via più fini nel modo seguente.

Sia

$$N_1 = \{A \subseteq \mathbb{N} : 1 \in A\} \quad \text{ed} \quad N_o = \mathcal{P}(\mathbb{N}) - N_1$$

Successivamente definiamo:

$$N_{11} = \{A \in N_1 : 2 \in A\} \quad , N_{10} = \{A \in N_1 : 2 \notin A\}$$

$$N_{01} = \{A \in N_o : 2 \in A\} \quad , N_{oo} = \{A \in N_o : 2 \notin A\}$$

Al passo n-mo ogni $N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ con $\alpha_k \in \{0,1\}$ verrà suddiviso in :

$$N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1} = \{A \in N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} : n+1 \in A\}$$

$$N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0} = \{A \in N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} : n+1 \notin A\}$$

Posto $A^1 = A$ e $A^o = \mathbb{N}-A$ si ha:

$$N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \{A \subseteq \mathbb{N} : k \in A^{\alpha_k} \quad \text{per} \quad k = 1,2,\ldots n\}$$

Risulta evidentemente

$$A \in N_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \leq m(A) \leq 1 - \sum_{k=1}^{n} (1-\alpha_k)a_k \ ;$$

pertanto posto

$$I^n_{\alpha_1\alpha\cdots\alpha_n} = \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \ , \ 1 - \sum_{k=1}^{n} (1-\alpha_k)a_k\right]$$

vale l'inclusione

$$m(N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) \subset I^n_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

e gli estremi dell'intervallo chiuso $I^n_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ appartengono ad $m(N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$.

Poiché risulta, per ogni $n\in\mathbb{N}$ fissato,

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \bigcup_{(\alpha_1\ldots\alpha_n)\in\{0,1\}^n} N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

si ha

(1) $$R_m = \bigcup m(N_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) \subset \bigcup I^n_{\alpha_1\ \ \alpha_n}$$

dove l'unione è estesa a tutte le $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n$ corrispondenti all'n fissato.

La (1) vale per ogni $n$, pertanto se indichiamo con $P_n$ tale unione, si ha

(2) $$R_m \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n = P.$$

Osservato che, per costruzione

$$I^{n+1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0} \cup I^{n+1}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1} \subset I^n_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

si ha che $(P_n)_n$ è una successione di pluriintervalli chiusi e descrescenti.

Se $x\in P$ allora $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n : x\in I^n_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ e poiché gli estremi dell'intervallo sono elementi di $R_m$ e l'ampiezza di $I^n_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ è $1-\sum_{k=1}^n a_k$, si ha: per ogni $\varepsilon>0$, $\exists y\in R_m$ tale che $|x-y|<\varepsilon$, cioé $x\in\bar{R}_m$ e quindi

(3) $$P \subset \bar{R}_m \quad .$$

Ma essendo $m$ numerabilmente additiva sula $\sigma$-algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R_m$ è chiuso (cfr. [1] e [2]) e quindi si ha il seguente

<u>TEOREMA</u> (2). $R_m = P$ .

Si osservi che ogni plurintervallo $P_n$ è simmetrico rispetto ad $\frac{1}{2}$ e contiene sia 0 che 1: $R_m$ è il limite di una successione di pluriintervalli chiusi e decrescenti, formati da intervalli chiusi non degeneri.

Osserviamo che da

$$a_1+a_2+\ldots+a_n < 1 \qquad \text{per ogni } n\in\mathbb{N}$$

segue che

$$(4) \qquad a_n < 1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \ .$$

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si possono distinguere le due seguenti alternative:

$$(5) \qquad a_n > \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 1 - (a_1 + \ldots + a_n) \qquad \text{e quindi}$$

$$(5)' \qquad a_n > \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)$$

oppure

$$(6) \qquad a_n \leq \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) \ .$$

La (4), valida sempre, ci dice che l'intervallo $I^n_{o\ldots o1}$ ed il suo simmetrico $I^n_{11\ldots 10}$ (non solo sono non vuoti ma) hanno la cardinalità del continuo.

La (5) ci dice che gli intervalli successivi $I^n_{oo\ldots o}$ e $I^n_{oo\ldots o1}$ (ed i loro simmetrici rispetto a $\frac{1}{2}$) sono disgiunti.

Possiamo pertanto enunciare il seguente

<u>TEOREMA</u> (3).

a) Se la (5) vale per almeno un $n$, $R_m$ non è connesso e precisamente gli intervalli aperti $(1-(a_1+\ldots+a_n), a_n)$ e $(1-a_n, a_1+\ldots+a_n)$ hanno intersezione vuota con $R_m$

b) Se la (5) vale solo per un numero finito di $n$, allora $R_m$ è unione finita di intervalli chiusi

c) Se la (5) vale per infiniti valori di $n$ (non necessariamente tutti), allora $R_m$ è un insieme tipo Cantor

d) Se la (6) vale per ogni $n$ allora $R_m = [0,1]$.

Si osservi che nel caso d) si ha anche: $P_n = [0,1]$ per ogni $n$.

3 - Esempi.

a) Data la serie

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \qquad \text{si ha} \qquad R_m = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

b) Poniamo $a_k = \dfrac{2}{3^k}$ per $k = 1,2,\ldots,n$ e

$$a_k = \frac{1}{3^n} \frac{1}{2^{k-n}} \qquad \text{per } k = n+1, n+2, \ldots .$$

Se $S$ è l'insieme di tutte le possibili somme che si possono formare con i primi $n$ termini della serie, il codominio $R_m$ sarà

$$R_m = [0, \frac{1}{3^n}] \cup \bigcup_{s \in S} [s, s + \frac{1}{3^n}]$$

cioé esattamente l'unione di $2^n$ intervalli aventi la stessa ampiezza.

c) Se $b > 2$, basta porre $a_n = \dfrac{b-1}{b^n}$ per avere la (5) per ogni $n$.

In particolare per $b=3$ si ha come $R_m$ l'insieme di Cantor.

Se si vuole una serie i cui termini con indice dispari verificano la (5), mentre quelli con indice pari verificano la (6), basta porre $a_1 > \dfrac{1}{2}$ e

$$a_{n+1} = [1-(a_1+a_2+\ldots+a_n)] - \alpha \quad \text{con} \qquad \alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \\[2ex] \dfrac{2}{3} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Es. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{2^2\, 3^2} + \dfrac{1}{2.3^2} + \dfrac{1}{2^3 \cdot 3^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-2}\, 3^n} + \dfrac{1}{2^n\, 3^n} + \ldots .$

d) Oltre al caso banale $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1$ la cui misura associata dà lo sviluppo diadico dell'intervallo $[0,1]$ , si può considerare il caso $a_n = \dfrac{b-1}{b^n}$ con $1<b\leq 2$.

4 - Ulteriori osservazioni.

Osservazione (1).

Sia $\ell$ la misura di Lebesgue su $[0,1]$; osserviamo che ogni intervallo $I^n$ ha ampiezza $1-\sum_{k=1}^{n} a_k$, ed essendo tali intervalli in numero di $2^n$, risulta

$\ell(P_n) = 2^n(1 - \sum_{k=1}^{n} a_k)$. Siccome $\ell(R_m) = \lim_n \ell(P_n)$,

$\ell(R_m)$ può assumere qualunque valore $\alpha$, con $0 \leq \alpha \leq 1$.

Osservazione (2).

Posto $\varepsilon_n = 2^n a_n$ le condizioni (5) e (6) diventano

(5")
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} < \frac{\varepsilon_n}{2^n}$$

(6')
$$\frac{\varepsilon_n}{2^n} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

Si vede allora che la (5") sarà verificata se $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e la (6') se $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n+k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Da questa osservazione si deducono i seguenti criteri:

Proposizione (1).

Considerata la successione $(2^n a_n)$, se questa risulta:

a) crescente, allora $R_m = [0,1]$

b) definitivamente crescente, allora $R_m$ è unione finita di intervalli chiusi

c) strettamente decrescente o tale che esista una sottosuccessione strettamente decrescente, allora $R_m$ è un insieme tipo Cantor.

Osservazione (3).

Dal Teorema (2) segue che $R_m$ è una famiglia diadica (cfr. [4] pag. 151) e risulta

$$R_m = \bigcup_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$$

Poiché $(I^n)_n$ è una successione decrescente di chiusi non vuoti il cui diametro tende a zero, per un noto teorema (cfr. [4] pag. 150), $\bigcap_n I^n$ si riduce ad un punto, e quindi appare evidente (come del resto è già noto) che $R_m$ ha la cardinalità del continuo. Tale risultato è più "forte" dell'affermazione: "$R_m$ è una famiglia diadica", perché, data la caratterizzazione di tali famiglie (cfr. [4] pag. 154), sarebbe come affermare semplicemente che $R_m$ è un compatto: ma ciò è ovvio, dato che $R_m$ è perfetto. D'altra parte esistono perfetti che non sono né intervalli chiusi, né unione finita di intervalli chiusi, né insiemi tipo Cantor (in nessuna parte). Ad esempio si consideri

$$P = \{0\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} I_n \qquad \text{con} \quad I_n = \left[\frac{1}{n} - \delta_n, \frac{1}{n} + \delta_n\right] \quad \text{e} \quad \delta_n = 1/3n(n+1) .$$

5 - Conseguenze del Teorema (2) per le misure. -

Se $\mathcal{A}$ è una $\sigma$-algebra di parti di $X$ ed $m : \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ è una misura, allora $R_m$ è sempre chiuso (cfr. [2]), ma può essere finito o no. Considerato il secondo caso e detti $y_1, y_2, \dots$ gli atomi di X, che possiamo considerare come punti di $X$, l'insieme $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ è al più numerabile, perché per ipotesi $m(X) < +\infty$ . Posto $Z = X - Y$, risulta $m$ non atomica su $Z$ e quindi continua (nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione finita di $X$ in insiemi $X_k \in \mathcal{A}$ tali che $m(X_k) < \varepsilon$). Pertanto il codominio di m su Z sarà tutto $[0, m(Z)]$.

Ne segue:

$$(7) \qquad R_m = [0, m(Z)] + \{0, m(y_1)\} + \{0, m(y_2)\} + \dots = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} [\lambda, \lambda + m(Z)]$$

dove

(8) $$\Lambda = \{\sum_{n\in A} m(y_n) \ ; \ A \subset \mathbb{N}\} \ .$$

L'inclusione $R_m \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} [\lambda,\lambda+m(Z)]$ è evidente. L'inclusione opposta si prova come segue: se $x \in [\lambda,\lambda+m(Z)]$, allora $x-\lambda \in [0,m(Z)]$ e perciò esiste $B \subset Z$, con $B \in \mathcal{A}$, tale che $m(B) = x-\lambda$. Essendo $\lambda\in\Lambda$ esiste $A \subset Y$ tale che $m(A) = \lambda$, e poiché $A \cap B = \emptyset$ risulta $m(A \cup B) = \lambda+(x-\lambda) = x$.

Poniamo $a = \sum_{n=1}^{\infty} m(y_n)$. Dalla (7) e (8) si vede che, nel caso in cui gli atomi sono in numero finito, $R_m$ è unione finita di intervalli chiusi, mentre nel caso in cui gli atomi sono un'infinità numerabile, si hanno i seguenti casi:

a) se $\Lambda = [0,a]$, allora $R_m = [0,a+m(Z)] = [0,m(X)]$

b) Se $\Lambda$ è unione finita d'intervalli disgiunti, oppure è un insieme tipo Cantor ed è $m(Z) > 0$, allora $R_m$ è unione finita d'intervalli chiusi. Se $p$ è il primo indice per cui vale la (5) ed è $m(Z) \geq a_1 + \ldots + a_{p-1} + 2a_p - 1$, dove $a_k=m(y_k)$, allora $R_m = [0,m(X)]$.

In breve possiamo dire:

<u>Proposizione</u> (2). Se $m$ è una misura non negativa e limitata sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ di parti di $X$, allora $R_m$ è finito, o coincide con $[0,m(X)]$, o è unione finita d'intervalli chiusi, ed è un insieme tipo Cantor solo nel caso in cui $m(Z)$ è uguale a zero, cioé è nulla la componente continua.

Questo enunciato è più esauriente del noto risultato richiamato col teorema (1).

## 6 - <u>Conseguenze del Teorema (2) per le masse.</u> -

Sia $m : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty)$ finitamente additiva e sia $R_m$ infinito. E' noto (cfr. [3] Teorema (3.3) che esiste $\{X_n \subset X; x \in \mathbb{N}\}$ partizione di $X$, con $m(X_n) > 0$, su cui $m$ è numerabilmente additiva. Considerata la $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ generata da $\{X_n ; n\in\mathbb{N}\}$, $m$ risulta numerabilmente additiva su $\mathcal{A}$. Osservato che:

$$\mathcal{A} = \{\bigcup_{n\in A} X_n \ ; \ A \subset \mathbb{N}\}$$

(9) $$m(\mathcal{A}) = \{\sum_{n\in A} m(X_n) \; ; \; A \subset \mathbb{N}\} \subset R_m \subset [0,m(X)] \; .$$

La (9) ci permette di enunciare la seguente:

Proposizione (3). Se $m : \mathcal{P}(X) \to [0,+\infty)$ è finitamente additiva, allora $R_m$ o è finito oppure contiene un insieme del tipo $P$ (cfr. (2)).

Tale proposizione è più esauriente del noto risultato: $R_m$ è finito oppure è denso in sé (cfr. [3]). Nel caso in cui si conoscono le $X_n$ si ha per esempio:

Proposizione (4). Se le $X_n$ sono ordinate in modo che $(m(X_n))_n$ sia decrescente e risulta $m(X_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m(X_k)$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, allora necessariamente $R_m = [0,m(X)]$.

(E' una semplice conseguenza della d) del Teorema (3).)

La condizione della proposizione (4) affinché sia $R_m = [0,m(X)]$ è più debole della continuità della $m$, come mostra l'esempio d) e la seguente

Proposizione (5). Se $m$ è continua, allora esiste $\{X_n ; n\in\mathbb{N}\}$, partizione su cui $m$ è numerabilmente additiva, tale che $m(X_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m(X_k)$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Dim. - Considerata una successione $(X_n)_n$ su cui $m$ è n.a., se non risulta $m(X_1) \leq \sum_{k=2}^{\infty} m(X_k)$, si ripartisce $X_1$ in $X_1'$ e $X_1''$ in modo tale che risulti $m(X_1') = m(X_1'') = \frac{1}{2}\, m(X_1)$. Indicando ora $X_1'$ come $X_1$, $X_1''$ come $X_2$, ecc., risulterà $m(X_1) \leq \sum_{k=2}^{\infty} m(X_k)$. Si confronta ora $m(X_2)$ con $\sum_{k=3}^{\infty} m(X_k)$ e si procede come prima. $\square$

Un'altra informazione su $R_m$ può essere data usando le conseguenze del teorema di rappresentazione di Stone (cfr. [5] pag. 23 e pag. 201 e [6]).

Sia $m$ una massa sull'algebra $\mathcal{A}$. Denotiamo con $[\mathcal{A}]$ lo spazio di Stone associato ad $\mathcal{A}$ : $[\mathcal{A}]$ è l'insieme degli ultrafiltri su $\mathcal{A}$. Esiste un omomorfismo $h$ tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{P}([\mathcal{A}])$, definito da

$$h(A) = \{\beta \in [\mathcal{A}] : A \in \beta\} = A^* \qquad \text{per ogni } A\in\mathcal{A}$$

La famiglia $\mathcal{A}^* = \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$, considerata come base degli aperti su $[\mathcal{A}]$, induce una topologia che rende $[\mathcal{A}]$ spazio topologico compatto e totalmente disconnesso. Inoltre $\mathcal{A}^*$ coincide con l'algebra dei sottoinsiemi contemporaneamente chiusi ed aperti (clopen) di $[\mathcal{A}]$.

Su $\mathcal{A}^*$ può essere definita una massa $m^*$ ponendo $m^*(A^*) = m(A)$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Tale massa è una misura in quanto se $\emptyset \neq A_n \in \mathcal{A}^*$ e $A_n \cap A_m = \emptyset$, necessariamente $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{A}^*$. Prolungata $m^*$ sulla $\sigma$-algebra $\mathcal{A}^*_\sigma$ generata da $\mathcal{A}^*$, risulta

$$\bar{R}_m = \overline{\{m^*(A^*) : A^* \in \mathcal{A}^*\}} = \{m^*(A) : A \in \mathcal{A}^*_\sigma\} .$$

Da ciò segue:

Proposizione (6). Se m è una massa sull'algebra $\mathcal{A}$, allora per $\bar{R}_m$ valgono le stesse alternative della Proposizione (2).

## B I B L I O G R A F I A


[1] KAI RANDER BUCH - *Some investigations of the set of values of measures in abstract space*, Mat. Fys. Medd. 21 (1945)

[2] P.R.HALMOS - *On the set of values of a finite measure*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 138-141.

[3] A.SOBCZGK e P.C.HAMMER - *The ranges of additive set functions*, Duke Math.J. 11 (1944), 847-851.

[4] F.HAUSDORFF - *Set theory*, Chelsea Publ. Co. -N.Y. (1962).

[5] R. SIKORSKI - *Boolean Algebras*, Springer (1969)

[6] G.H.GRECO e M.P.MOSCHEN - *Algebre d'insiemi e misure finitamente additive*, Bollettino U.M.I. (5) 18-B (1982).