n. 5. Rappresentazione spettrale e matrice dello scattering. -

La trasformata di Fourier di una rappresentazione per traslazioni è una rappresentazione spettrale, ovvero $U(t)$ agisce come moltiplicazione per $e^{i\mu t}$.

Denotiamo con

$$(\mathfrak{J}_{\pm} f)(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\mu r}(R_{\pm} f)(r)\,dr \tag{5.1}$$

Il rappresentante dell'operatore di scattering è allora:

$$\mathfrak{J}_{-} f \rightarrow \mathfrak{J}_{+} f \qquad \text{per} \quad f \in \mathcal{H}'_C \tag{5.2}$$

Vogliamo ora provare che

$$(\mathfrak{J}_{\pm} f)\ (\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad E(f, e_{\pm}, {}_n(\mu)) \tag{5.3$_\pm$}$$

dove $\mathbf{e}_{\pm,n}(\mu)$ è la serie di Eisensten generalizzata di peso n, generata da

$$h_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}iz} \left\{ y^{\frac{n+1}{2} \pm iz}, -i\,z\,y^{\frac{n+1}{2} \pm iz} \right\}$$

rispettivamente.

Proviamo $(5.3)_+$ sul sottoinsieme denso di $\mathcal{H}'_C$ costituito dai dati f per i quali $R_+ f$ è C_o^∞. Ciò è sufficiente perché $\mathfrak{J}_+$ è continuo. Per tali dati si ha:

$$\sqrt{2\pi}\, \mathfrak{J}_+ f(\mu) = \langle R_+ f, e^{-i\mu r} \rangle = \langle \mathbb{R}_+ \sigma(\tilde{f}), e^{-i\mu r} \rangle =$$

$= \mathbb{E}(\sigma\varphi(\tilde{f}), T_\mu)$ dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e

$T_\mu = \frac{1}{i\mu}\{ e^{-i\mu r}, +i\mu e^{-i\mu r} \}$. Denotiamo ancora con S la striscia $|x|<1/2$, si ha:

$$\mathbb{E}(\sigma(\tilde{f}), T_\mu) = E_S(\tilde{f}, T^*_\mu)$$

dove $T^*_\mu = \frac{+1}{i\mu}\{ y^{\frac{n+1}{2} + i\mu}, + i\mu\, y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \}$

Ma

$$E_S(f,T_\mu^*) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} E_{\gamma^{-1}F}(f,T_\mu^*) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} E_F(f,(T_\mu^*\gamma)\, D(\gamma))$$

$$= E_F(f,\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma}(T_\mu^*\gamma)D(\gamma)) = E_F(f,\overline{e_{+,n}(\mu)})$$

in quanto la somma che definisce la serie di Eisentein converge per $I\,m\,\mu < (n-\frac{1}{2})$ in $\mathcal{H}_G$, eccetto per il termine dato da $\gamma = \mathrm{id}$ (1) infatti:

$$e_{+,n}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}\, i\,\mu} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} \left\{ \frac{y^{\frac{n+1}{2}+i\mu}, -i\,\mu\, y^{\frac{n+1}{2}+i\,\mu}}{|c\,z+d|^{n+1+2\,i\mu}} \right\} \cdot (c+d)^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\, i\,\mu} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} \left\{ \frac{y^{\frac{1}{2}+i\mu}}{|cz+d|^{1+2i\mu}}, -i\mu \frac{y^{\frac{1}{2}+i\mu}}{|cz+d|^{1+2i\mu}} \right\} y^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{(cz+d)^n}{|cz+d|^n}$$

Premettiamo alcune considerazioni sulla serie di Eisenstein.

Sia $e(z,\mu)$ la serie $\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} h(\gamma z)\, D(\gamma)$ dove $h(z) =$ $\left\{ y^{\frac{n+1}{2}+i\,\mu}, i\,\mu\, y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \right\}$. Essa converge per $I\,m\,\mu < (n-\frac{1}{2})$ ed eccetto per il primo termine, la serie converge nella G-norma e

$$(A - i\mu)\, e = 0 \tag{5.5}$$

nel senso delle distribuzioni per $\mathrm{Im}\,\mu < (n-\frac{1}{2})$; ne segue che e è C^∞ e soddisfa puntualmente la (5.5). Inoltre dopo integrazione rispetto ad x, si ha:

---

(1) Il termine per $\gamma = \mathrm{id}$ è comunque in H_G locale, con lo stesso metodo usato in [7] si trova g a supporto compatto in modo che $E(f,e_{\pm n}(\mu)) = E(g,e_{\pm}(\mu))$.

$$[\, y^2 \partial_y^2 - ny\, \partial_y + (\frac{n+1}{2})^2]\, e_1^{(o)} = -\mu^2\, e_1^{(o)} \tag{5.6}$$

allora $e^{(o)}$ è della forma seguente:

$$e^{(o)}(y,\mu) = \left\{ y^{\frac{n+1}{2} + i\mu},\ i\mu y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \right\} + s_n(\mu) \left\{ y^{\frac{n+1}{2} - i\mu},\ i\mu y^{\frac{n+1}{2} - i\mu} \right\} .$$

Se P_- e P_+ sono le proiezioni ortogonali sugli ortogonali di $\mathfrak{D}_-$ e $\mathfrak{D}_+$ in $\tilde{\mathcal{H}}$ e B è il generatore del semigruppo $z(t) = P_+\, U(t)\, P_-$ per $t \geq 0$, allora il risolvente di B è meromorfo nel piano complesso (teoremi 3.2 e 3.3 di [7]) allora il lemma 4.1 e il teorema 4.2 di [7] applicati al nostro caso ci danno il seguente risultato: la serie di Eisenstein e si può estendere in modo meromorfo a tutto il piano complesso con poli al più nei punti di $-i\cdot$(spettro di B); ne discende che anche $s_n(\mu)$ è meromorfa con poli al più in $-i\cdot$(spettro di B).

Inoltre lo stesso procedimento per h_+ e h_- dà:

$$\sqrt{2}\, i\mu\, e_+^{(o)}(y,\mu) = \left\{ y^{\frac{n+1}{2} + i\mu},\ -i\mu y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \right\} + s_n(\mu) \left\{ y^{\frac{n+1}{2} - i\mu},\ -i\mu y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \right\}$$

$$-\sqrt{2}\, i\,\mu\, e_-^{(o)}(y,\mu) = \left\{ y^{\frac{n+1}{2} - i\mu},\ -i\mu y^{\frac{n+1}{2} - i\mu} \right\} + s_n(\mu) \left\{ y^{\frac{n+1}{2} + i\mu},\ -i\mu y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \right\}$$

Pertanto $f = e_+(\mu) + s_n(\mu)\, e_-(\mu)$ soffisfa $f^{(o)}(\mu) = \text{costante} \left\{ y^{\frac{n+1}{2} + i\mu},\ -i\mu y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \right\}$

e procedendo esattamente come nel lemma 6.4 di [7] si ha $f = 0$ ovvero

$$e_{+,n}(\mu) = -\, s_n(\mu)\, e_{-,n}(\mu) \tag{5.7}$$

Abbiamo così provato che per $I m\, \mu < (n - \frac{1}{2})$ risulta:

$$\mathfrak{I}_{\pm}\, f(\mu) = E_F(f, e_{\pm,n}(\mu)) \tag{5.8}$$

ma tale uguaglianza vale anche per $\operatorname{Im}\mu \geq n - \frac{1}{2}$ quando $e_{\pm,n}(\mu)$ denota la continuazione analitica della serie di Eisenstein.

Segue da (5.8) e (5.7) che la matrice dello scattering è data proprio da $- s_n(\mu)$.

Si troverà ora un'espressione della matrice dello scattering tramite la funzione Γ (o integrale euleriano di seconda specie) e la funzione ζ di Riemann. Infatti dalla serie

$$e(z,\mu) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} h(\gamma z)D(\gamma) \quad \text{con} \quad h(z) = \{y^{\frac{n+1}{2}+i\mu}, i\mu y^{\frac{n+1}{2}+i\mu}\}$$

si ha:

$$\sum_{\gamma} \frac{y^{\frac{n+1}{2}+i\mu}}{|cz+d|^{(n+1+2i\mu)}}(cz+d)^n = y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} + y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \sum_{\gamma\neq id} \frac{(cz+d)^n}{|cz+d|^{n+1+2i\mu}}$$

da cui integrando rispetto ad x:

$$e^{(o)}(z) = y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} + y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \sum_c \sum_{d_o} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(cz+d_o)^n \, dx}{|cz+d_o|^{n+1+2i\mu}} =$$

$$= y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} + y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \sum_c \sum_{d_o} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(cx+icy+d_o)^n}{[(cx+d_o)^2+c^2y^2]^{\frac{n+1}{2}+i\mu}} dx$$

dove $d = d_o + mc$; d'altra parte ponendo $q = \frac{cx+d_o}{cy}$ si ha

$$e^{(o)}(z) = y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} + y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \sum_c \sum_{d_o} \frac{y}{(cy)^{1+2i\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(q+i)^n}{(q^2+1)^{\frac{n+1}{2}+i\mu}} dq \quad .$$

Un semplice calcolo ci dà per l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(q+1)^n}{(q^2+1)^{\frac{n+1}{2}+i\mu}} dq$$ la seguente espressione:

$$I = \frac{-i^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2} - iz\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{k}{2} - iz\right)}$$

allora procedendo come in [6] (pag. 175 e 176) si ottiene per $-s_n(\mu)$ la seguente espressione:

$$(5.9) \qquad -s_n(\mu) = \frac{-a}{2\mu}\, i^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2} - i\mu\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{k}{2} - i\mu\right)} \cdot \frac{\zeta(2i\mu)}{\zeta(1+2i\mu)}$$

dove ζ è la funzione zeta di Riemann:

$$\zeta(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-p_n^{-w}} \right)$$

con $\{p_n\}$ successione dei numeri primi.

Si osservi che per $n = 0$ la (5.3) si riduce alla matrice dello scattering per le funzioni automorfe, trovata da Lax e Phillips in [6].