Se q_j sono le autofunzioni di L corrispondenti agli autovalori positivi λ_j^2, costruiamo lo spazio Φ generato dai dati

$$f_j^{\pm} = \{q_j \ , \ \pm\lambda_j \, q_j\}$$

e denotiamo con:

$\mathcal{H}_o$ l'insieme dei dati $f = \{f_1, f_2\}$ con f_1 appartenente al dominio di $|L|^{\frac{1}{2}}$ ed f_2 appartenente ad H_1

$\mathcal{H}'_o$ il sottospazio di $\mathcal{H}_o$ E-ortogonale a Φ

$\mathcal{H}'_E$ il completamento di $\mathcal{H}'_o$ rispetto alla norma dell'energia.

L'operatore $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}$ genera nello spazio $\mathcal{H} = \Phi \oplus \mathcal{H}'_E$ un gruppo di operatori unitari $U(t)$ (unitari rispetto all'energia).

Consideriamo inoltre gli spazi $\mathring{\mathcal{H}}_G$, $\mathring{\mathcal{H}}'_G$ ottenuti completando rispetto alla G-norma i sottospazi $\mathcal{H}_o$ e $\mathcal{H}'_o$, l'iniezione canonica:

$$j : \mathring{\mathcal{H}}'_G \to \mathcal{H}'_E$$

risulta surgettiva ed il suo nucleo $\mathcal{J}$ ha dimensione finita e coincide con il nucleo di A considerato come operatore su $\mathring{\mathcal{H}}_G$. Inoltre A genera anche su $\mathring{\mathcal{H}}'_G$ un gruppo di operatori $U'(t)$ che cresce al più esponenzialmente e per cui vale l'uguaglianza $j\,U'(t) = U(t)j$ (pertanto continueremo a indicarlo con $U(t)$).

n.3. Riduzione del problema al caso dello spazio libero.

Consideriamo il seguente cambiamento di variabili sui dati $\{u, u_t\}$ a supporto compatto in F, nulli per $y \leq 0$ e dipendenti dal solo parametro y:

$$\begin{cases} v = u\, y^{-(\frac{n+1}{2})} \\ v_t = u_t\, y^{-(\frac{n+1}{2})} \\ s = \log y \end{cases}$$

allora l'equazione delle onde (2.1) si scrive:

$$v_{tt} = \partial_s^2 v \tag{3.1}$$

e l'energia $E(\{u,u_t\})$ nelle nuove variabili si scrive:

$$E(\{v,v_t\}) = \int \| v_t\|^2 + \| \partial_s v\|^2 ds \tag{3.2}$$

Se $f = \{f_1,f_2\}$ è un dato nullo per $y < a$, introduciamo le funzioni:

$$f_k^{(o)}(y) = \int_{|x|\leq \frac{1}{2}} f_k(x,y)dx \qquad (k=1,2)$$

$$\sigma_k(f)(r) = e^{-(\frac{n+1}{2})r} f_k^{(o)}(e^r) \quad .$$

E' facile verificare che la norma di $f_k^{(o)}$ in $L_2(F)$ coincide con quella di $\sigma_k(f)$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ ($\mathbb{R}^2$ con la misura usuale) inoltre:

$$\sigma(Af) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\partial_s^2 & 0 \end{pmatrix} \sigma(f) \tag{3.4}$$

e se f ha supporto compatto in F risulta anche:

$$E(f) = \mathbb{E}\,(\sigma(f)) \quad (1) \qquad (3.5)$$

Seguendo [4] denotiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme di dati f in $\mathcal{H}_G$ dipendenti solo da y e tali che $f = 0$ se $y < a$, e sia

$$\tilde{\mathcal{H}} = \overline{\bigcup_t U(t)\,\mathcal{S}} \qquad \text{(chiusura in } \mathcal{H}_G)$$

L'operatore σ si può estendere da $\mathcal{S}$ a tutto $\tilde{\mathcal{H}}$ e con valori in $\mathbb{H}$, nel modo seguente:

Sia $f \in \tilde{H}$ e t tale che $U(t)f \in \mathcal{S}$, allora poniamo:

$$\sigma(f) = \mathbf{U}(-t)\ \sigma(U(t)f) \qquad (3.6)$$

La (3.6) è una buona definizione infatti se $f \in \mathcal{S}$ e $U(t)f \in \mathcal{S}$ allora la definizione di $\sigma(f)$ data in (3.3) coincide con quella data da (3.6) per l'unicità della soluzione dell'equazione delle onde nello spazio libero con dato iniziale fissato. L'estensione a tutto $\tilde{\mathcal{H}}$ avviene per densità.

Osserviamo qui che lo spazio $\mathcal{S}$ è generato dai dati del tipo:

$$\{y^{(\frac{n+1}{2})}\ \phi(y)\ ,\ y^{(\frac{n+3}{2})}\ \phi'(y)\} \qquad (3.7)$$

e

$$\{y^{(\frac{n+1}{2})}\ \phi(y)\ ,-y^{(\frac{n+3}{2})}\ \phi'(y)\} \qquad (3.8)$$

dove $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ed è nulla per $y < a$.

---

(1) D'ora in avanti si useranno le notazioni in grassetto quando siamo nel caso libero più precisamente nello spazio libero $\mathbb{H}$ con $\mathbb{E}$ si denoterà l'energia ad esso associata, con $\mathbb{U}(t)$ il gruppo ad un parametro di operatori unitari di $\mathbb{H}$ ed infine con $\mathbb{D}_{\pm}$ si indicheranno gli spazi di uscita ed entrata relativi ad $\mathbb{U}(t)$.

Lemma 3.1. *Se* $f \in \mathcal{H}_G$ *è E-ortogonale a* $\tilde{\mathcal{H}}$ *allora* $f_2^{(o)} = 0$ *e* $f_1^{(o)} = c\, y^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ *se* $y \geq a$.

Con l'aiuto di questo lemma la dimostrazione del seguente teorema diventa del tutto simile a quella del teorema 6.6 pag. 126 di [6].

Teorema 3.1. *Sia* $K = \mathcal{H}_G \ominus \tilde{\mathcal{H}}$, *allora per ogni* λ *nel risolvente di* A *, l'operatore* $(\lambda I - A)^{-1}$ *trasforma la palla unitaria di* K *in un sottoinsieme compatto di* $\mathcal{H}_G$.

n.4. La rappresentazione per traslazioni; spazi di entrata e di uscita.-

Definiamo i seguenti spazi:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_+ = \{f \in \tilde{\mathcal{H}} / \sigma(f) \in \mathbb{D}_+\} \\ \mathcal{D}_- = \{f \in \tilde{\mathcal{H}} / \sigma(f) \in \mathbb{D}_-\} \end{cases} \tag{4.1}$$

$\mathcal{D}_+$ e $\mathcal{D}_-$ coincidono con gli spazi chiusi generati dai dati del tipo (3.7) e (3.8) rispettivamente; valgono inoltre i seguenti fatti:

$\mathcal{D}_+ + \mathcal{D}_- = \tilde{\mathcal{H}}$, $\mathcal{D}_+$ è ortogonale a $\mathcal{D}_-$, inoltre $\mathcal{D}_\pm$, $\tilde{\mathcal{H}}$ $U(t)$ soddisfano le condizioni (i)(ii)(iii) di § 2 a pag. 12 di [6], in quanto σ risulta essere un'isometria di $\tilde{\mathcal{H}}$ (con energia E) sullo spazio libero $\mathbb{H}$ (con energia $\mathbb{E}$) che traforma $\mathcal{D}_\pm$ rispettivamente in $\mathbb{D}_\pm$.

Ora seguendo [6] poiché $\mathcal{D}_+$ e $\mathcal{D}_-$ non sono in $\mathcal{H}'_E$ proiettiamo $\mathcal{H}_G$ su tutto $\mathcal{H}'_E$ mediante la proiezione E-ortogonale:

$$Q' : \mathcal{H}_G \to \mathcal{H}'_E \tag{4.2}$$

$$Q'f = f + \sum_j a_j f_j^+ + \sum_j b_j f_j^-$$