Cenno di dimostrazione: 1a) fissato $\lambda \in (-\infty, -(\frac{n+1}{2})^2)$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $u_\varepsilon \in H_1$ tale che:

$$\| (L - \lambda) u_\varepsilon \| \leq \varepsilon \| u_\varepsilon \| \tag{1.6}$$

le funzioni u_ε si possono trovare esattamente come nel teorema 4.1 pag. 30 di [6], partendo nel nostro caso dalla funzione $y^{\frac{n+1}{2} + i\mu}$ che è un'autofunzione generalizzata per L_0, corrispondente all'autovalore $\lambda = -(\frac{n+1}{2})^2 - \mu^2$.

Per la 1b) basta tener presente la (1.5).

Possiamo allora applicare all'operatore L considerato sullo spazio H_1, la teoria modificata dello scattering secondo Lax e Phillips.

n.2. Equazione delle onde automorfe di peso n.

Consideriamo l'equazione delle onde automorfe di peso n:

$$Lu = u_{tt} \qquad u \in H_1 \tag{2.1}$$

l'energia associata

$$E = \| u_t \|^2 - (u, Lu)$$

è positiva su H_1 eccezion fatta per un sottospazio di dimensione finita.

La disuguaglianza (1.4) suggerisce di considerare su H_1 la forma quadratica:

$$G(u) = E(u) + r\, K(u) .$$

Denotiamo con $\mathcal{H}_G$ il completamento dell'insieme dei dati $f = \{f_1, f_2\}$ (con f_1, f_2 funzioni di H_1) rispetto alla norma:

$$G(f) = \| f_2 \|^2 - (f_1, L f_1) + r\, K(f_1)$$

Se q_j sono le autofunzioni di L corrispondenti agli autovalori positivi λ_j^2, costruiamo lo spazio Φ generato dai dati

$$f_j^{\pm} = \{q_j \ , \ \pm\lambda_j \, q_j\}$$

e denotiamo con:

$\mathcal{H}_o$ l'insieme dei dati $f = \{f_1, f_2\}$ con f_1 appartenente al dominio di $|L|^{\frac{1}{2}}$ ed f_2 appartenente ad H_1

$\mathcal{H}'_o$ il sottospazio di $\mathcal{H}_o$ E-ortogonale a Φ

$\mathcal{H}'_E$ il completamento di $\mathcal{H}'_o$ rispetto alla norma dell'energia.

L'operatore $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}$ genera nello spazio $\mathcal{H} = \Phi \oplus \mathcal{H}'_E$ un gruppo di operatori unitari $U(t)$ (unitari rispetto all'energia).

Consideriamo inoltre gli spazi $\mathring{\mathcal{H}}_G$, $\mathring{\mathcal{H}}'_G$ ottenuti completando rispetto alla G-norma i sottospazi $\mathcal{H}_o$ e $\mathcal{H}'_o$, l'iniezione canonica:

$$j : \mathring{\mathcal{H}}'_G \to \mathcal{H}'_E$$

risulta surgettiva ed il suo nucleo $\mathfrak{I}$ ha dimensione finita e coincide con il nucleo di A considerato come operatore su $\mathring{\mathcal{H}}_G$. Inoltre A genera anche su $\mathring{\mathcal{H}}'_G$ un gruppo di operatori $U'(t)$ che cresce al più esponenzialmente e per cui vale l'uguaglianza $j\, U'(t) = U(t) j$ (pertanto continueremo a indicarlo con $U(t)$).

n.3. Riduzione del problema al caso dello spazio libero.

Consideriamo il seguente cambiamento di variabili sui dati $\{u, u_t\}$ a supporto compatto in F, nulli per $y \leq 0$ e dipendenti dal solo parametro y: