n. 0. Preliminari.-

Il piano di Poincaré π è il semipiano superiore:

$$\pi = \{z = x+i\ y \in \mathbb{C} / y > 0\ ,\ -\infty < x < +\infty\}$$

su esso opera il gruppo G delle trasformazioni lineari fratte:

$$z \longrightarrow \frac{a\ z + b}{c\ z + d}$$

con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$. Un sottogruppo discreto di $SL(2,\mathbb{R})$ è $SL(2,\mathbb{Z})$; un dominio fondamentale per $SL(2,\mathbb{Z})$ è il sottoinsieme F di π, così definito:

$$F = \{z = x + i\ y \in \mathbb{C} / -1/2 < x < 1/2,\ x^2 + y^2 > 1\}$$

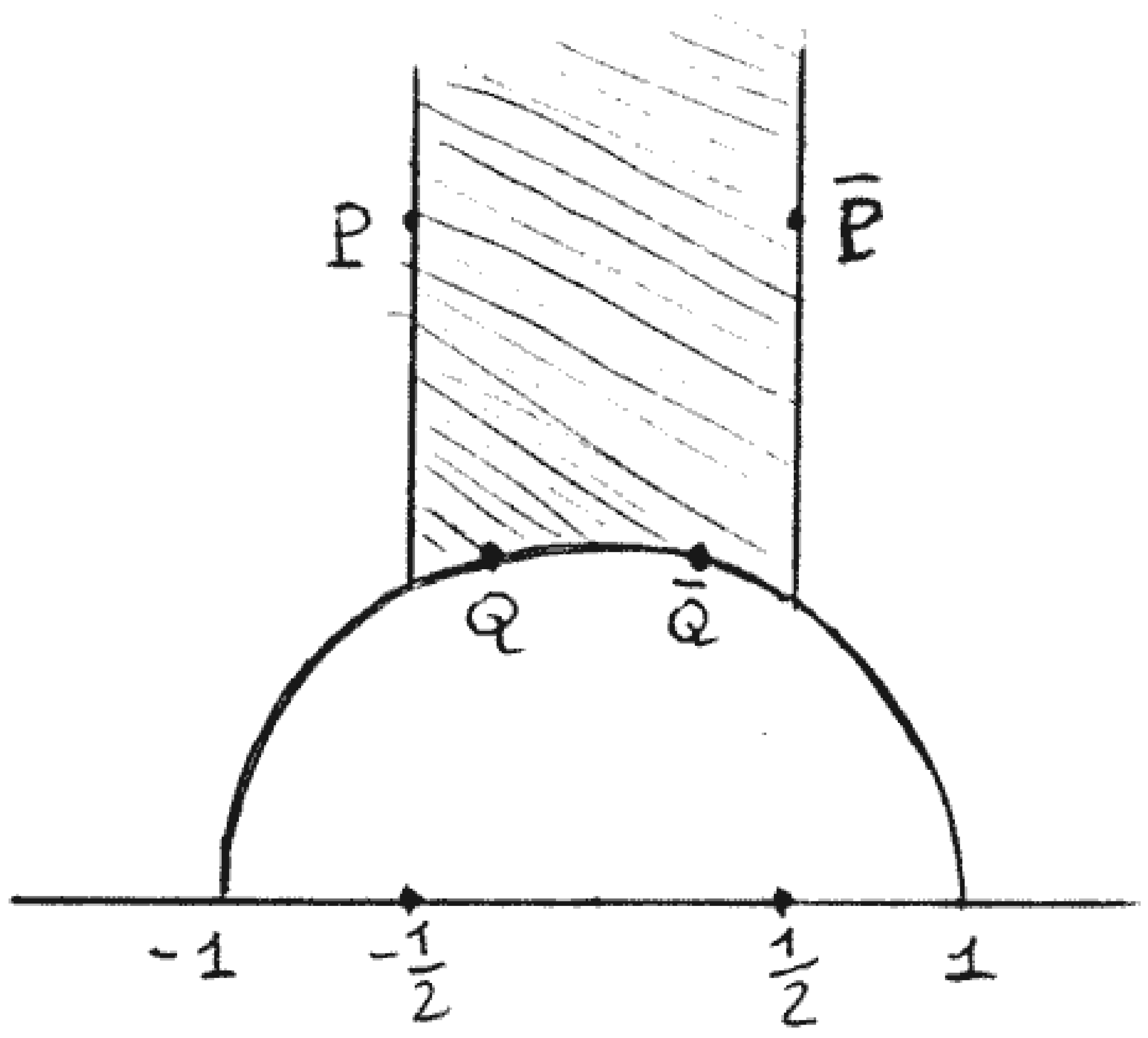

fig. 1

la trasformazione $z \to z + 1$ trasforma P in $\bar{P}$; la trasformazione $z \to -1/z$ trasforma Q in $\bar{Q}$ (fig. 1). La chiusura $\bar{F}$ si può riguardare come una varietà $\mathfrak{F}$ allorché si pensino identificati i punti P, $\bar{P}$ e Q, $\bar{Q}$ della frontiera di F.

Una funzione u definita su π si dice *automorfa di peso* n (n intero) se per ogni $z \in \pi$ e per ogni $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, risulta:

$$u(\gamma\ z) = (c\ z + d)^{-n}\ u(z)\ .$$

Si può pensare ad una funzione automorfa di peso n, come una funzione definita sul dominio F e soddisfacente le seguenti condizioni al bordo (c.b.):

$$\text{(i)}\ \partial_y u\,(x,\sqrt{1-x^2}) = -(x-i\sqrt{1-x^2})^n\ \partial_y u(-x,\sqrt{1-x^2})$$

$$\text{(ii)}\ (\partial_x u)\,(\tfrac{1}{2},y) = (\partial_x u)(-\tfrac{1}{2},y)$$

$$\text{(iii)}\ (\partial_x u)\,(-\sqrt{1-y^2},y)\ \bar{v}(-\sqrt{1-y^2},y) = (\partial_x u)(\sqrt{1-y^2},y)\bar{v}(\sqrt{1-y^2},y)$$

Si introduce il seguente prodotto scalare (,) nello spazio $\mathcal{L}$ delle funzioni $C_0^\infty(F)$ (funzioni C^∞ a supporto compatto) soddisfacenti le condizioni (c.b.):

$$(u,v) = \int_F u(x,y)\ \bar{v}(x,y)y^{-n-2}\ dx\ dy$$

L'operatore L_0 definito da:

$$L_0(u) = y^2(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) + i\ n\ y(\partial_x u + i\ \partial_y u)$$

per ogni $u \in \mathcal{L}$, risulta essere simmetrico rispetto al prodotto scalare (,) sopra definito.

Per motivi che appariranno evidenti nel seguito, noi prenderemo in considerazione l'operatore $L = L_0 + (\frac{n+1}{2})^2$.

Con $L_2(F)$ denoteremo poi il completamento di $\mathcal{L}$ rispetto alla norma $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$ (per ogni $u \in \mathcal{L}$).

n.1. <u>Spettro di L</u>. -

Si denoti con F_0 il sottoinsieme di F:

$$F_0 = \{(x,y) \in F\ /\ y \leq a\}$$

dove a è un numero reale ≥ 2, e sia $F_1 = F - F_0$; un semplice calcolo, dà la seguente espressione per $-(Lu,u)$:

$$(1.1)\qquad -(Lu,u) = \int_F \{y^{-n}(|\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2) - i\ n\ y^{-n-1}(\partial_x u)\bar{u} - (\frac{n+1}{2})^2 \frac{|u|^2}{y^{n+2}}\}\ dxdy$$

Per ogni $u \in \mathcal{L}$ si ponga: