TEORIA DELLO SCATTERING PER FUNZIONI AUTOMORFE DI PESO n.(°)

Rosa Anna Marinosci (°°)

INTRODUZIONE.

In [5] e [6] Lax e Phillips hanno sviluppato in dettaglio la teoria dello scattering per l'equazione delle onde automorfe sul semipiano di Poincaré, seguendo un'idea di Faddev e Pavlov ([1]), che per primi avevano posto in luce i legami tra tale teoria e l'analisi armonica delle funzioni automorfe.

Nei due suddetti lavori Lax e Phillips applicano tale teoria per ottenere da una parte un noto risultato di teoria dei numeri: il carattere meromorfo delle serie di Eisenstein, e dall'altro una nuova formula della traccia di Selberg.

In questo lavoro sviluppiamo la teoria dello scattering di Lax e Phillips per l'equazione delle onde automorfe di peso n, fino a trovare la matrice dello scattering e quindi una dimostrazione del carattere meromorfo delle serie di Eisenstein "generalizzate".

Ci proponiamo di utilizzare in seguito tali risultati per ottenere un'altra forma della formula della traccia di Selberg.

Abbiamo preferito non ricordare tutte le dimostrazioni che fossero una banale estensione del lavoro di Lax e Phillips, mentre nella seconda parte abbiamo utilizzato il metodo diretto di passaggio al caso libero di [4]. Per le notazioni riguardanti la teoria astratta dello scattering e per quelle riguardanti il caso libero facciamo riferimento a [3] e [4] rispettivamente.

n. 0. Preliminari.-

Il piano di Poincaré π è il semipiano superiore:

$$\pi = \{z = x+i\,y \in \mathbb{C} / y > 0 \ , \ -\infty < x < +\infty\}$$

su esso opera il gruppo G delle trasformazioni lineari fratte:

$$z \longrightarrow \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$. Un sottogruppo discreto di $SL(2,\mathbb{R})$ è $SL(2,\mathbb{Z})$; un dominio fondamentale per $SL(2,\mathbb{Z})$ è il sottoinsieme F di π, così definito:

$$F = \{z = x + i\,y \in \mathbb{C} / \ -1/2 < x < 1/2,\ x^2 + y^2 > 1\}$$

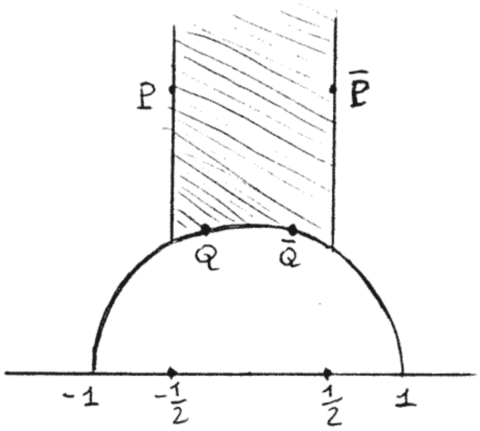

fig. 1

la trasformazione $z \to z + 1$ trasforma P in $\bar{P}$; la trasformazione $z \to -1/z$ trasforma Q in $\bar{Q}$ (fig. 1). La chiusura $\bar{F}$ si può riguardare come una varietà $\mathfrak{F}$ allorché si pensino identificati i punti P, $\bar{P}$ e Q, $\bar{Q}$ della frontiera di F.

Una funzione u definita su π si dice *automorfa di peso* n (n intero) se per ogni $z \in \pi$ e per ogni $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, risulta:

$$u(\gamma\, z) = (c\,z + d)^{-n}\ u(z) \quad .$$

Si può pensare ad una funzione automorfa di peso n, come una funzione definita sul dominio F e soddisfacente le seguenti condizioni al bordo (c.b.):

$$\text{(i)}\quad \partial_y u\,(x,\sqrt{1-x^2}) = -(x-i\,\sqrt{1-x^2})^n\ \partial_y u(-x,\sqrt{1-x^2})$$

$$\text{(ii)}\quad (\partial_x u)\,(\tfrac{1}{2},y) = (\partial_x u)(-\tfrac{1}{2},y)$$

$$\text{(iii)}\quad (\partial_x u)\,(-\sqrt{1-y^2},y)\ \bar{v}(-\sqrt{1-y^2},y) = (\partial_x u)(\sqrt{1-y^2},y)\bar{v}(\sqrt{1-y^2},y)$$

Si introduce il seguente prodotto scalare (,) nello spazio $\mathcal{L}$ delle funzioni $C_0^\infty(F)$ (funzioni C^∞ a supporto compatto) soddisfacenti le condizioni (c.b.):

$$(u,v) = \int_F u(x,y)\ \bar{v}(x,y)y^{-n-2}\ dx\ dy$$

L'operatore L_0 definito da:

$$L_0(u) = y^2(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) + i\ n\ y(\partial_x u + i\ \partial_y u)$$

per ogni $u \in \mathcal{L}$, risulta essere simmetrico rispetto al prodotto scalare (,) sopra definito.

Per motivi che appariranno evidenti nel seguito, noi prenderemo in considerazione l'operatore $L = L_0 + (\frac{n+1}{2})^2$.

Con $L_2(F)$ denoteremo poi il completamento di $\mathcal{L}$ rispetto alla norma $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$ (per ogni $u \in \mathcal{L}$).

n.1. <u>Spettro di L</u>. -

Si denoti con F_0 il sottoinsieme di F:

$$F_0 = \{(x,y) \in F\ /\ y \leq a\}$$

dove a è un numero reale ≥ 2, e sia $F_1 = F - F_0$; un semplice calcolo, dà la seguente espressione per $-(Lu,u)$:

$$(1.1)\qquad -(Lu,u) = \int_F \{y^{-n}(|\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2) - i\ n\ y^{-n-1}(\partial_x u)\bar{u} - (\frac{n+1}{2})^2 \frac{|u|^2}{y^{n+2}}\}\ dxdy$$

Per ogni $u \in \mathcal{L}$ si ponga:

$$u^{(o)}(u) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u(x,y)\, dx \qquad \forall y \in [1,+\infty[$$

si noti che $u^{(o)}(y)$ può essere definita anche per $y \leq 1$ quando u è nulla per $y \leq 1$ (o più in generale se u è definita su tutta la striscia $S = \{(x,y) \in \pi / \ |x| \leq 1/2\}$).

I seguenti sottospazi di $L_2(F)$:

$H_2 = \{u \in L_2(F)/u$ soddisfa le condizioni (c.b.) e $u^{(o)}(y) = 0 \quad \forall y \geq a\}$

$H_1 = \{u \in L_2(F)/u$ soddisfa le condizioni (c.b.) e $(u,v) = 0 \quad \forall v \in H_2\}$

sono invarianti per l'azione di L; su H_1 risulta poi $-(Lu,u) \geq 0$ eccezion fatta per un sottospazio di dimensione finita; infatti poiché $y\, \partial_x u \in H_2$, si ha:

$$\int_F y^{-n-1} (\partial_x u)\, \bar{u}\, d\,x\,d\,y = 0$$

e procedendo come in [6] si ha:

$$(1.2) \quad -(Lu,u) = \int_{F_o} \{y^{-n}(|\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \frac{|u|^2}{y^{n+2}}\}\, dxdy +$$

$$+ \int_{F_1} \{y^{-n}|\partial_x u|^2 + y|\partial_y\left(\frac{u}{y^{\frac{n+1}{2}}}\right)|^2\} dxdy - \left(\frac{n+1}{2}\right) \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} \frac{u}{a^{n+1}}(x,a)dx \quad .$$

Ma per $a > 2$ si ha (in modo del tutto simile al lemma 4.2. pag. 95 di [6]):

$$\int_{|x| \leq \frac{1}{2}} \frac{u^2}{a^{n+1}}\, dx \leq \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} \{(3+n) \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{u^2}{a^{n+2}}\, dy + \frac{1}{n+1} \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{(\partial_y u)^2}{a^n}\, dy\} dx$$

e pertanto:

$$(1.3) \qquad -(Lu,u) \geq \frac{1}{2} \int_{F_o} y^{-n} |\partial_y u|^2\, dx\, dy + \int_F y^{-n} |\partial_x u|^2\, dxdy +$$

$$+ \int_{F_1} y \, |\partial_y(\frac{y}{y^{\frac{n+1}{2}}})|^2 \, dxdy - \{(\frac{n+1}{2})^2 + (\frac{n+1}{2})(3+n)\} \int_{F_o} \frac{|u|^2}{y^{n+2}} \, dx\, dy$$

da cui introducendo la forma quadratica

$$K(u) = \int_{F_o} \frac{|u|^2}{y^{n+2}} \, dxdy$$

si ha per un opportuno $r > 0$

(1.4) $$r\, K(u) - (Lu,u) \geq 0 \quad .$$

La compatezza di $K(u)$ rispetto alla forma

$$C_o(u) = \int_{F_o} \{|\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2 + \frac{u^2}{y^{n+2}}\} \, dxdy$$

implica che per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $K(u) \leq \varepsilon\, C_o(u)$ su qualche sottospazio di codimensione finita in H_1 e quindi per il lemma 4.3. pag. 97 di [6] segue che

(1.5) $$(Lu,u) < 0$$

su un sottospazio di codimensione finita in H_1.

Possiamo allora enunciare i seguenti fatti per lo spettro di L_o in H_1 :

1a) ogni punto di $(-\infty, -(\frac{n+1}{2})^2$ appartiene allo spettro L_o .

1b) fuori dell'intervallo $(-\infty,-(\frac{n+1}{2})^2$ lo spettro di L_o consiste di un numero finito di autovalori di molteplicità finita .

Cenno di dimostrazione: 1a) fissato $\lambda \in (-\infty, -(\frac{n+1}{2})^2)$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $u_\varepsilon \in H_1$ tale che:

$$\| (L - \lambda) u_\varepsilon \| \leq \varepsilon \| u_\varepsilon \| \tag{1.6}$$

le funzioni u_ε si possono trovare esattamente come nel teorema 4.1 pag. 30 di [6], partendo nel nostro caso dalla funzione $y^{\frac{n+1}{2}+i\mu}$ che è un'autofunzione generalizzata per L_0, corrispondente all'autovalore $\lambda = -(\frac{n+1}{2})^2 - \mu^2$.

Per la 1b) basta tener presente la (1.5).

Possiamo allora applicare all'operatore L considerato sullo spazio H_1, la teoria modificata dello scattering secondo Lax e Phillips.

n.2. Equazione delle onde automorfe di peso n.

Consideriamo l'equazione delle onde automorfe di peso n:

$$Lu = u_{tt} \qquad u \in H_1 \tag{2.1}$$

l'energia associata

$$E = \| u_t \|^2 - (u, Lu)$$

è positiva su H_1 eccezion fatta per un sottospazio di dimensione finita.

La disuguaglianza (1.4) suggerisce di considerare su H_1 la forma quadratica:

$$G(u) = E(u) + r\, K(u) .$$

Denotiamo con $\mathcal{H}_G$ il completamento dell'insieme dei dati $f = \{f_1, f_2\}$ (con f_1, f_2 funzioni di H_1) rispetto alla norma:

$$G(f) = \| f_2 \|^2 - (f_1, L f_1) + r\, K(f_1)$$

Se q_j sono le autofunzioni di L corrispondenti agli autovalori positivi λ_j^2, costruiamo lo spazio $\mathcal{P}$ generato dai dati

$$f_j^{\pm} = \{q_j \ , \ \pm\lambda_j \ q_j\}$$

e denotiamo con:

$\mathcal{H}_0$ l'insieme dei dati $f = \{f_1, f_2\}$ con f_1 appartenente al dominio di $|L|^{\frac{1}{2}}$ ed f_2 appartenente ad H_1

$\mathcal{H}'_0$ il sottospazio di $\mathcal{H}_0$ E-ortogonale a $\mathcal{P}$

$\mathcal{H}'_E$ il completamento di $\mathcal{H}'_0$ rispetto alla norma dell'energia.

L'operatore $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 0 \end{pmatrix}$ genera nello spazio $\mathcal{H} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{H}'_E$ un gruppo di operatori unitari $U(t)$ (unitari rispetto all'energia).

Consideriamo inoltre gli spazi $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_G$ $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}'_G$ ottenuti completando rispetto alla G-norma i sottospazi $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}'_0$, l'iniezione canonica:

$$j : \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}'_G \to \mathcal{H}'_E$$

risulta surgettiva ed il suo nucleo $\mathcal{J}$ ha dimensione finita e coincide con il nucleo di A considerato come operatore su $\overset{\circ}{\mathcal{H}}_G$. Inoltre A genera anche su $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}'_G$ un gruppo di operatori $U'(t)$ che cresce al più esponenzialmente e per cui vale l'uguaglianza $j\,U'(t) = U(t)j$ (pertanto continueremo a indicarlo con $U(t)$).

n.3. Riduzione del problema al caso dello spazio libero.

Consideriamo il seguente cambiamento di variabili sui dati $\{u, u_t\}$ a supporto compatto in F, nulli per $y \leq 0$ e dipendenti dal solo parametro y:

$$\begin{cases} v = u\, y^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\ v_t = u_t\, y^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\ s = \log y \end{cases}$$

allora l'equazione delle onde (2.1) si scrive:

$$v_{tt} = \partial_s^2 v \tag{3.1}$$

e l'energia $E(\{u,u_t\})$ nelle nuove variabili si scrive:

$$E(\{v,v_t\}) = \int \| v_t\|^2 + \| \partial_s v\|^2 ds \tag{3.2}$$

Se $f = \{f_1,f_2\}$ è un dato nullo per $y < a$, introduciamo le funzioni:

$$f_k^{(o)}(y) = \int_{|x|\leq \frac{1}{2}} f_k(x,y)dx \qquad (k=1,2)$$

$$\sigma_k(f)(r) = e^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)r} f_k^{(o)}(e^r) \quad .$$

E' facile verificare che la norma di $f_k^{(o)}$ in $L_2(F)$ coincide con quella di $\sigma_k(f)$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ ($\mathbb{R}^2$ con la misura usuale) inoltre:

$$\sigma(Af) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\partial_s^2 & 0 \end{pmatrix} \sigma(f) \tag{3.4}$$

e se f ha supporto compatto in F risulta anche:

$$E(f) = \mathbb{E}\,(\sigma(f))^{(1)} \tag{3.5}$$

Seguendo [4] denotiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme di dati f in $\mathcal{H}_G$ dipendenti solo da y e tali che $f = 0$ se $y < a$, e sia

$$\tilde{\mathcal{H}} = \overline{\bigcup_t U(t)\,\mathcal{S}} \qquad \text{(chiusura in } \mathcal{H}_G)$$

L'operatore σ si può estendere da $\mathcal{S}$ a tutto $\tilde{\mathcal{H}}$ e con valori in $\mathbb{H}$, nel modo seguente:

Sia $f \in \tilde{\mathcal{H}}$ e t tale che $U(t)f \in \mathcal{S}$, allora poniamo:

$$\sigma(f) = \mathbb{U}(-t)\ \ \sigma(U(t)f) \tag{3.6}$$

La (3.6) è una buona definizione infatti se $f \in \mathcal{S}$ e $U(t)f \in \mathcal{S}$ allora la definizione di $\sigma(f)$ data in (3.3) coincide con quella data da (3.6) per l'unicità della soluzione dell'equazione delle onde nello spazio libero con dato iniziale fissato. L'estensione a tutto $\tilde{\mathcal{H}}$ avviene per densità.

Osserviamo qui che lo spazio $\mathcal{S}$ è generato dai dati del tipo:

$$\{y^{(\frac{n+1}{2})}\ \phi(y)\ ,\ y^{(\frac{n+3}{2})}\ \phi'(y)\} \tag{3.7}$$

e

$$\{y^{(\frac{n+1}{2})}\ \phi(y)\ ,\ -y^{(\frac{n+3}{2})}\ \phi'(y)\} \tag{3.8}$$

dove $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ed è nulla per $y < a$.

---

(1) D'ora in avanti si useranno le notazioni in grassetto quando siamo nel caso libero più precisamente nello spazio libero $\mathbb{H}$ con $\mathbb{E}$ si denoterà l'energia ad esso associata, con $\mathbb{U}(t)$ il gruppo ad un parametro di operatori unitari di $\mathbb{H}$ ed infine con $\mathbb{D}_\pm$ si indicheranno gli spazi di uscita ed entrata relativi ad $\mathbb{U}(t)$.

Lemma 3.1. *Se* $f \in \mathcal{H}_G$ *è E-ortogonale a* $\tilde{\mathcal{H}}$ *allora* $f_2^{(o)} = 0$ *e* $f_1^{(o)} = c\, y^{(\frac{n+1}{2})}$ *se* $y \geq a$.

Con l'aiuto di questo lemma la dimostrazione del seguente teorema diventa del tutto simile a quella del teorema 6.6 pag. 126 di [6].

Teorema 3.1. *Sia* $K = \mathcal{H}_G \ominus \tilde{\mathcal{H}}$, *allora per ogni* λ *nel risolvente di* A , *l'operatore* $(\lambda I - A)^{-1}$ *trasforma la palla unitaria di* K *in un sottoinsieme compatto di* $\mathcal{H}_G$.

n.4. La rappresentazione per traslazioni; spazi di entrata e di uscita.-

Definiamo i seguenti spazi:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_+ = \{f \in \tilde{\mathcal{H}} / \sigma(f) \in \mathbb{D}_+\} \\ \\ \mathcal{D}_- = \{f \in \tilde{\mathcal{H}} / \sigma(f) \in \mathbb{D}_-\} \end{cases} \tag{4.1}$$

$\mathcal{D}_+$ e $\mathcal{D}_-$ coincidono con gli spazi chiusi generati dai dati del tipo (3.7) e (3.8) rispettivamente; valgono inoltre i seguenti fatti:

$\mathcal{D}_+ + \mathcal{D}_- = \tilde{\mathcal{H}}$, $\mathcal{D}_+$ è ortogonale a $\mathcal{D}_-$, inoltre $\mathcal{D}_{\pm}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ $U(t)$ soddisfano le condizioni (i)(ii)(iii) di § 2 a pag. 12 di [6], in quanto σ risulta essere un'isometria di $\tilde{\mathcal{H}}$ (con energia E) sullo spazio libero $\mathbb{H}$ (con energia $\mathbb{E}$) che traforma $\mathcal{D}_{\pm}$ rispettivamente in $\mathbb{D}_{\pm}$.

Ora seguendo [6] poiché $\mathcal{D}_+$ e $\mathcal{D}_-$ non sono in $\mathcal{H}'_E$ proiettiamo $\mathcal{H}_G$ su tutto $\mathcal{H}'_E$ mediante la proiezione E-ortogonale:

$$Q' : \mathcal{H}_G \to \mathcal{H}'_E \tag{4.2}$$

$$Q'f = f + \sum_j a_j\, f_j^+ + \sum_j b_j\, f_j^-$$

dove $a_j = \dfrac{E(f,f_j^+)}{\lambda_j^2}$ e $b_j = \dfrac{E(f,f_j^-)}{\lambda_j^2}$.

Considerazioni analoghe a quelle fatte in [4] provano che per $\mathcal{D}_{\pm} = \mathcal{Q}'\,\mathcal{D}_{\pm}$ valgono i seguenti fatti:

$\mathcal{D}'_{\pm}$ sono chiusi in $\mathcal{H}'_E$ e soddisfano le condizioni (i)(ii)(iii) di § 2 a pag.12 di [6], $\mathcal{Q}'$ è una E-isometria iniettiva di $\mathcal{D}_{\pm}$ in $\mathcal{D}'_{\pm}$; inoltre

$$\mathcal{H}'_E = \mathcal{H}'_P \oplus \mathcal{H}'_C \tag{4.3}$$

dove $\mathcal{H}'_P$ è lo spazio generato dai dati $f \in \mathcal{H}_1$ tali che $A(f)$ è nullo in $\mathcal{H}'_E$ ed X'_C è il complemento E-ortogonale delle autofunzioni di A in H'_E.

Risulta: $\mathcal{H}'_C \subset \overline{\cup\, U(t)\,\mathcal{D}'_{\pm}}$

Troveremo ora le rappresentazioni per traslazione di $\mathcal{D}'_+$ e $\mathcal{D}'_-$ su $\mathcal{H}'_C$ provando così che $U(t)$ ha uno spettro assolutamente continuo su $\overline{\cup\, U(t)\,\mathcal{D}'_{\pm}}$ e pertanto $\overline{\cup\, U(t)\,\mathcal{D}'_{\pm}} \subseteq \mathcal{H}'_C$.

Se f è un dato C_0^∞ nullo per $y \leq a$ e dipendente solo da y definiamo

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty | \Gamma} f(\gamma z)\, D(\gamma) \tag{4.4}$$

dove $D(\gamma) = (cz+d)^n$ se $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\tilde{f}$ è allora un dato automorfo di peso n sul semipiano π che coincide con f sul dominio fondamentale F: se $z \in F$ e $\gamma \neq id$ allora $\gamma z \notin F$ e quindi

$$\operatorname{Im}(\gamma z) < a \tag{4.5}$$

Per $\tilde{f}$ come in (4.4) possiamo definire $\sigma(\tilde{f})$ secondo le formule (3.3) in quanto $\tilde{f}$ è definita su tutto il semipiano, inoltre poiché $\tilde{f}$ coincide con f

sul dominio fondamentale F si ha:

$$\begin{aligned} E(\tilde{f}) &= E(f) \\ U(t)\tilde{f} &= U(t)f \end{aligned} \tag{4.6}$$

su F.

Definiamo ora per f e $\tilde{f}$ come sopra:

$$\begin{aligned} R_+ f &= \mathbb{R}_+(\sigma(f)) \\ R_+ \tilde{f} &= \mathbb{R}_+(\sigma(f)) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ricordiamo che $\mathbb{R}_+$ denota l'operatore: $(g_1,g_2) \to \text{cost}\,(\partial_r g_1(r) - g_2(r))$.

Valgono i seguenti fatti (che discendono da analoghi fatti per la rappresentazione $\mathbb{R}$ su $\mathbb{H}$):

α) $\| R_+ f \| = E(f)$ (da (3.5))

β) $R_+\ U(t)f = T(t)\ R_+ f$ (da (3.9))

γ) R_+ mappa $\mathcal{D}_+$ su tutto lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile con supporto in $\mathbb{R}_+$.

Proviamo che $R_+ \tilde{f} = R_+ f$ per $f \in \mathcal{D}_-$.

Se $f_o = \{y^{(\frac{n+1}{2})} \phi(y), - y^{(\frac{n+3}{2})} \phi'(y)\}$ la soluzione di (2.1) con dato iniziale f_o è data da:

$$u_o(z,t) = y^{\frac{n+1}{2}} \phi(y\, e^{-t})$$

quindi per $t \geq 0$ anche $U(t)f_o$ si annulla per $y \leq a$ ne segue da (4.5) e (4.6) che per $t \geq 0$:

$$\widetilde{U(t)f_o} = U(t)f_o = U(t)\,\tilde{f}_o \qquad \text{su } F.$$

Quindi $R_+ U(t) f_o = R_+ U(t) \tilde{f}_o$ per $t \geq 0$ e $y \geq a$; poiché inoltre $\sigma(\tilde{f}_o)$ dipende solo sa y, ancora una volta l'unicità della soluzione dell'equazione delle onde nello spazio libero con valore iniziale fissato garantisce che

$$T(t)\, \mathbb{R}_+ f_o = T(t)\, R_+ \tilde{f}_o$$

per ogni $t \geq 0$ ed $s \geq \log a$, da cui si deduce che tale uguaglianza vale per ogni s e quindi che

$$R_+ f = R_+ \tilde{f} \qquad \text{per } f \in \overline{\bigcup U(t) \mathcal{D}_-}$$

E' ovvio inoltre che vale l'uguaglianza:

$$\|R_+ \tilde{f}\| = E(\tilde{f}) .$$

In modo analogo a (4.7) si definiscono:

$$R_- \tilde{f} = \mathbb{R}_- (\sigma(\tilde{f}))$$

$$R_- f = \mathbb{R}_- (\sigma(f))$$

Ricordando le espressioni di $\mathbb{R}_+$ e $\mathbb{R}_-$:

$$(\mathbb{R}_+ \sigma(f))(r) = -\frac{1}{2}(\partial_r \sigma_1(f)(r) - \sigma_2(f)(r))$$

$$(\mathbb{R}_+ \sigma(f))(r) = -\frac{1}{2}(\partial_r \sigma_1(f)-r) + \sigma_2(f)(-r))$$

ogni elemento $d'_+ \in \mathcal{D}'_+$ si può scrivere:

$$d'_+ = d_+ + p$$

dove $d_+ \in \mathcal{D}_+$ e $p \in \mathbb{P}$, inoltre si ha $E(d'_+) = E(d_+)$ e poiché $\| R_+ p \| = E(p) = 0$ $\forall p \in P \cap \mathcal{D}_+$, ha senso definire:

$$R_+ d'_+ = R_+ d_+ .$$

E' chiaro a questo punto che R_+ (R_-) definisce una $\mathcal{D}'_+$-rappresentazione ($\mathcal{D}'_-$-rappresentazione) per traslazione di uscita (di entrata).

n. 5. Rappresentazione spettrale e matrice dello scattering. -

La trasformata di Fourier di una rappresentazione per traslazioni è una rappresentazione spettrale, ovvero $U(t)$ agisce come moltiplicazione per $e^{i\mu t}$.

Denotiamo con

$$(\mathfrak{J}_{\pm} f)(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\mu r}(R_{\pm} f)(r)dr \tag{5.1}$$

Il rappresentante dell'operatore di scattering è allora:

$$\mathfrak{J}_- f \to \mathfrak{J}_+ f \qquad \text{per} \quad f \in \mathcal{H}'_C \tag{5.2}$$

Vogliamo ora provare che

$$(\mathfrak{J}_{\pm} f)(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E(f, e_{\pm,n}(\mu)) \tag{5.3$_\pm$}$$

dove $e_{\pm,n}(\mu)$ è la serie di Eisensten generalizzata di peso n, generata da

$$h_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}iz} \left\{ y^{\frac{n+1}{2} \pm iz}, -i\,z\,y^{\frac{n+1}{2} \pm iz} \right\}$$

rispettivamente.

Proviamo $(5.3)_+$ sul sottoinsieme denso di $\mathcal{H}'_C$ costituito dai dati f per i quali $R_+ f$ è C_0^∞. Ciò è sufficiente perché $\mathfrak{J}_+$ è continuo. Per tali dati si ha:

$$\sqrt{2\pi}\, \mathfrak{J}_+ f(\mu) = \langle R_+ f, e^{-i\mu r} \rangle = \langle \mathbb{R}_+ \sigma(\tilde{f}), e^{-i\mu r} \rangle =$$

$= \mathbb{E}(\sigma\varphi(\tilde{f}), T_\mu)$ dove $\langle , \rangle$ è il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e

$T_\mu = \frac{1}{i\mu}\{ e^{-i\mu r}, +i\mu e^{-i\mu r} \}$. Denotiamo ancora con S la striscia $|x|<1/2$, si ha:

$$\mathbb{E}(\sigma(\tilde{f}), T_\mu) = E_S(\tilde{f}, T^*_\mu)$$

dove $T^*_\mu = \frac{+1}{i\mu}\{ y^{\frac{n+1}{2} + i\mu}, + i\mu\, y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \}$

Ma

$$E_S(f,T^*_\mu) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} E_{\gamma^{-1}F}(f,T^*_\mu) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} E_F(f,(T^*_\mu\,\gamma)\,D(\gamma))$$

$$= E_F(f, \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} (T^*_\mu\,\gamma)D(\gamma)) = E_F(f,\overline{e_{+,n}(\mu)})$$

in quanto la somma che definisce la serie di Eisentein converge per $\mathrm{Im}\,\mu < (n-\frac{1}{2})$ in $\mathcal{H}_G$, eccetto per il termine dato da $\gamma = \mathrm{id}$ (1) infatti:

$$e_{+,n}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}\,i\,\mu} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} \left\{ \frac{y^{\frac{n+1}{2}+i\mu},\ -i\,\mu\, y^{\frac{n+1}{2}+i\,\mu}}{|c\,z+d|^{n+1+2\,i\mu}} \right\} \cdot (c+d)^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,i\,\mu} \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} \left\{ \frac{y^{\frac{1}{2}+i\mu}}{|cz+d|^{1+2i\mu}},\ -i\mu\,\frac{y^{\frac{1}{2}+i\mu}}{|cz+d|^{1+2i\mu}} \right\} y^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{(cz+d)^n}{|cz+d|^n}$$

Premettiamo alcune considerazioni sulla serie di Eisenstein.

Sia $e(z,\mu)$ la serie $\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty|\Gamma} h(\gamma z)\,D(\gamma)$ dove $h(z) = \left\{ y^{\frac{n+1}{2}+i\,\mu},\ i\,\mu\, y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \right\}$. Essa converge per $\mathrm{Im}\,\mu < (n-\frac{1}{2})$ ed eccetto per il primo termine, la serie converge nella G-norma e

$$(A - i\mu)\,e = 0 \tag{5.5}$$

nel senso delle distribuzioni per $\mathrm{Im}\,\mu < (n-\frac{1}{2})$; ne segue che e è C^∞ e soddisfa puntualmente la (5.5). Inoltre dopo integrazione rispetto ad x, si ha:

---

(1) Il termine per $\gamma = \mathrm{id}$ è comunque in H_G locale, con lo stesso metodo usato in [7] si trova g a supporto compatto in modo che $E(f,e_{\pm n}(\mu)) = E(g,e_{\pm}(\mu))$.

$$[\, y^2\, \partial_y^2 - ny\, \partial_y + (\tfrac{n+1}{2})^2]\, e_1^{(o)} = -\mu^2\, e_1^{(o)} \tag{5.6}$$

allora $e^{(o)}$ è della forma seguente:

$$e^{(o)}(y,\mu) = \left\{ y^{\frac{n+1}{2}+i\mu},\ i\mu y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \right\} + s_n(\mu) \left\{ y^{\frac{n+1}{2}-i\mu},\ i\mu y^{\frac{n+1}{2}-i\mu} \right\} .$$

Se P_- e P_+ sono le proiezioni ortogonali sugli ortogonali di $\mathcal{D}_-$ e $\mathcal{D}_+$ in $\tilde{\mathcal{H}}$ e B è il generatore del semigruppo $z(t) = P_+ U(t) P_-$ per $t \geq 0$, allora il risolvente di B è meromorfo nel piano complesso (teoremi 3.2 e 3.3 di [7]) allora il lemma 4.1 e il teorema 4.2 di [7] applicati al nostro caso ci danno il seguente risultato: la serie di Eisenstein e si può estendere in modo meromorfo a tutto il piano complesso con poli al più nei punti di $-i\cdot$(spettro di B); ne discende che anche $s_n(\mu)$ è meromorfa con poli al più in $-i\cdot$(spettro di B).

Inoltre lo stesso procedimento per h_+ e h_- dà:

$$\sqrt{2}\, i\mu\, e_+^{(o)}(y,\mu) = \left\{ y^{\frac{n+1}{2}+i\mu},\ -i\mu y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \right\} + s_n(\mu) \left\{ y^{\frac{n+1}{2}-i\mu},\ -i\mu y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \right\}$$

$$-\sqrt{2}\, i\,\mu\, e_-^{(o)}(y,\mu) = \left\{ y^{\frac{n+1}{2}-i\mu},\ -i\mu y^{\frac{n+1}{2}-i\mu} \right\} + s_n(\mu) \left\{ y^{\frac{n+1}{2}+i\mu},\ -i\mu y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \right\}$$

Pertanto $f = e_+(\mu) + s_n(\mu)\, e_-(\mu)$ soddisfa $f^{(o)}(\mu) = \text{costante} \left\{ y^{\frac{n+1}{2}+i\mu},\ -i\mu y^{\frac{n+1}{2}+i\mu} \right\}$

e procedendo esattamente come nel lemma 6.4 di [7] si ha $f = 0$ ovvero

$$e_{+,n}(\mu) = -\, s_n(\mu)\, e_{-,n}(\mu) \tag{5.7}$$

Abbiamo così provato che per $\mathrm{Im}\,\mu < (n - \frac{1}{2})$ risulta:

$$\mathcal{J}_{\pm}\, f(\mu) = E_F(f, e_{\pm,n}(\mu)) \tag{5.8}$$

ma tale uguaglianza vale anche per $\mathrm{Im}\,\mu \geq n - \frac{1}{2}$ quando $e_{\pm,n}(\mu)$ denota la continuazione analitica della serie di Eisenstein.

Segue da (5.8) e (5.7) che la matrice dello scattering è data proprio da $-s_n(\mu)$.

Si troverà ora un'espressione della matrice dello scattering tramite la funzione Γ (o integrale euleriano di seconda specie) e la funzione ζ di Riemann. Infatti dalla serie

$$e(z,\mu) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty | \Gamma} h(\gamma z) D(\gamma) \quad \text{con} \quad h(z) = \{ y^{\frac{n+1}{2} + i\mu}, i\mu y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \}$$

si ha:

$$\sum_{\gamma} \frac{y^{\frac{n+1}{2} + i\mu}}{|cz + d|^{(n+1+2i\mu)}} (cz + d)^n = y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} + y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \sum_{\gamma \neq id} \frac{(cz + d)^n}{|cz + d|^{n+1+2i\mu}}$$

da cui integrando rispetto ad x:

$$e^{(o)}(z) = y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} + y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \sum_c \sum_{d_o} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(cz + d_o)^n \, dx}{|cz + d_o|^{n+1+2i\mu}} =$$

$$= y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} + y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \sum_c \sum_{d_o} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(cx + icy + d_o)^n}{[(cx + d_o)^2 + c^2 y^2]^{\frac{n+1}{2} + i\mu}} dx$$

dove $d = d_o + mc$; d'altra parte ponendo $q = \frac{cx + d_o}{cy}$ si ha

$$e^{(o)}(z) = y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} + y^{\frac{n+1}{2} + i\mu} \sum_c \sum_{d_o} \frac{y}{(cy)^{1+2i\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(q+i)^n}{(q^2+1)^{\frac{n+1}{2} + i\mu}} dq \quad .$$

Un semplice calcolo ci dà per l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(q+1)^n}{(q^2+1)^{\frac{n+1}{2} + i\mu}} dq$$ la seguente espressione:

$$I = \frac{-i^{n+1}}{2} \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{K} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2} - iz\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{k}{2} - iz\right)}$$

allora procedendo come in [6] (pag. 175 e 176) si ottiene per $-s_n(\mu)$ la seguente espressione:

$$(5.9) \qquad -s_n(\mu) = \frac{-a}{2\mu} i^{n+1} \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{K} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2} - i\mu\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{k}{2} - i\mu\right)} \cdot \frac{\zeta(2i\mu)}{\zeta(1+2i\mu)}$$

dove ζ è la funzione zeta di Riemann:

$$\zeta(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-p_n^{-w}}\right)$$

con $\{p_n\}$ successione dei numeri primi.

Si osservi che per $n = 0$ la (5.3) si riduce alla matrice dello scattering per le funzioni automorfe, trovata da Lax e Phillips in [6].

B I B L I O G R A F I A

[1] L.D.FADDEEV AND B.S.PAVLOV: "*Scattering theory and automorphic functions*" Proc. Steklov Inst.Math. 27 (1972) 161-193.

[2] T.KUBOTA: "*Elementary theory of Eisenstein series*" Wiley New York 1973.

[3] G.GIGANTE:"*Scattering per l'equazione delle onde negli spazi simmetrici di rango 1 e di tipo non compatto*" - Quaderni dell'Istituto di Matematica del l'Università di Lecce. Q. 11-1981.

[4] G.GIGANTE: "*Scattering per l'equazione delle onde automorfe sul polidisco*" in corso di preparazione.

[5] P.D.LAX AND R.S.PHILLIPS: "*Scattering theory*". Academic Press New York 1967.

[6] P.D. LAX AND R.S.PHILLIPS: "*Scattering theory for automorphic functions*". Ann. of Math. Studies n. 87 Princeton University Press - Princeton N.J. 1976.

[7] P.D.LAX AND R.S.PHILLIPS: "*Scattering theory for automorphic functions*, Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. 2 N.2 March. 1980 (pag. 261-295).