parte totalmente ordinata ammette sup. : se Φ è tot. ordinata e $\Phi \subset \Phi_{\mathscr{F}}$, il $\sup\Phi$ è il filtro generato dall' $\bigcup_{\mathscr{F}'\in\Phi} \mathscr{F}'$). Per il Teorema di Zorn $\Phi_{\mathscr{F}}$ ammette un elemento massimale che è l'ultrafiltro cercato.

cvd

Non si conoscono dimostrazioni effettive (cioé non basate sull'assioma della scelta) di questo teorema.

<u>Osservazione</u> 1. - Vi è una bigezione tra gli ideali massimali, gli ultrafiltri, gli omomorfismi a 2 valori e le misure a due valori. Infatti se $\mathscr{F}$ è un ultrafiltro, il suo duale è un ideale massimale, $h(A) = \begin{cases} 1 \text{ se } A \in \mathscr{F} (1,0\in A) \\ 0 \text{ se } A \notin \mathscr{F} \end{cases}$ è un omomorfismo a 2 valori e $m(A) = \begin{cases} 1 \text{ se } A \in \mathscr{F} \\ 0 \text{ se } A \notin \mathscr{F} \end{cases}$ è una misura a 2 valori e viceversa.

§5 - <u>Legame con gli anelli algebrici.</u>

$\emptyset \neq A$ con $(+,.)$ è detto <u>anello</u> (in senso algebrico) se e solo se

(R1) $A + B = B + A$ (commutatività di +)

(R2) $A + (B+C) = (A+B) + C$ (associatività di +)

(R3) Dato A e C $\exists!\ B \ni' A+B = C$ (esistenza dello zero e dell'opposto)

(R4) $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$ (associatività di .)

(R5) $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ } distributività

(R6) $(A+B)\cdot C = A\cdot C+B\cdot C$

Dai primi 3 segue che $\exists\, 0$ (zero) $\in \mathscr{A} \ni' A+0 = A$.

Un elemento $1 \in \mathscr{A}$ è detto <u>l'unità</u> di $\mathscr{A} \overset{\text{def}}{\iff} A\cdot 1 = A = 1\cdot A \quad \forall A \in \mathscr{A}$.

L'anello è <u>commutativo</u> $\iff A\cdot B = B\cdot A$.

L'anello è un <u>anello Booleano</u> se contiene l'unità e $A\cdot A = A \quad \forall A$.

Esempio di anello Booleano è l'anello degli interi modulo 2 cioé $\{0,1\}$ con :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

In un anello Booleano si ha (1) $A+A = 0$ (2) $A+B=0 \Longrightarrow B=A$, (3) $AB=BA$.

DIM.- (1) $(1+A)(1+A) = (1+A) \Longrightarrow (1+A)+(A+A)=1+A \Longrightarrow$ per la R3) $A+A=0$

(2) Segue che (1) e da R3) per l'unicità dell'elemento B.

(3) $(A+B)(A+B) = A+B \Longrightarrow A^2 + BA + AB + B^2 = A+B \Longrightarrow BA+AB = 0$ e e dalla (2) segue $AB = BA$.

cvd

PROP. 10 - Ogni algebra Booleana è un anello Booleano con le seguenti definizioni di addizione e di moltiplicazione:

$$A + B = A \triangle B$$
$$A \cdot B = A \cap B$$

Viceversa ogni anello Booleano è un'algebra Booleana con le seguenti operazioni:

$$A \cup B = A + B + AB$$
$$A \cap B = A \cdot B$$
$$-A = 1 + A$$

In entrambi i casi gli zeri (e le unità) coincidono.
(Per la dim. cfr. [1] pag. 53).

§6 - Campi d'insiemi ridotti e perfetti.

DEFINIZIONE 14 - Se $\mathscr{A}$ è un campo di sottoinsiemi di X, diremo che $\mathscr{A}$ è ridotto se $\mathscr{A}$ separa i punti di X, cioé

$$\forall\, x \neq y \text{ (in X) } \exists\, A \in \mathscr{A} \ni' \; x \in A \text{ e } y \notin A$$