Mentre se $\mathscr{I}$ è un ideale di $\mathscr{A}$ non è detto che lo sia $h(\mathscr{I})$ (questo perché se $A' \in h(\mathscr{I})$ e $B' \subset A'$ non è detto che sia $B' \in h(\mathscr{I})$).

DEFINIZIONE 12 - h <u>isomorfismo</u> $\iff$ h omomorfismo ed h ingettiva.

Nel caso in cui h è un isomorfismo surgettivo allora $\mathscr{A}$ ed $\mathscr{A}_1$ si dicono <u>isomorfe</u>.

In tal caso h^{-1} è un isomorfismo di $\mathscr{A}_1$ su $\mathscr{A}$.

PROP. 8 - $h : \mathscr{A} \to \mathscr{A}_1$: h isomorfismo) $\iff$ (h omomorfismo e $h^{-1}(0) = 0$)

(o equivalentemente $h(A) = 0 \implies A = 0$)

<u>ESEMPIO</u> - Con riferimento all'esempio B) del §1, $\mathscr{A}_1$ ed $\mathscr{A}_2$ sono isomorfe mediante $h(A) = \mathring{A}$ $\quad \forall A \in \mathscr{A}_1$.

§4 - <u>Ideali e filtri massimali</u> (o <u>ultrafiltri</u>).

DEFINIZIONE 13 - <u>Un ideale</u> (<u>filtro</u>) proprio di $\mathscr{A}$ è detto <u>massimale</u> se non è strettamente contenuto in un altro ideale (filtro) proprio di $\mathscr{A}$.

PROP. 9 - $\mathscr{I}$ ideale ($\mathscr{F}$ filtro) massimale $\iff$ $\forall A \in \mathscr{A}$: A oppure $-A \in \mathscr{I} (\in \mathscr{F})$ dove l'oppure è esclusivo.

DIM.- Intanto non può essere A e $-A \in \mathscr{I}$ altrimenti $A \cup (-A) = 1 \in \mathscr{I}$ ed $\mathscr{I}$ non è un ideale proprio. Se poi per assurdo $\exists\, A \in \mathscr{A} \ni'$ né A né $-A$ appartengono ad $\mathscr{I}$ allora detto $\mathscr{I}_0$ l'ideale generato da $\{\mathscr{I}, A\}$ risulta $\mathscr{I}_0$ proprio $\supset \mathscr{I}$.

cvd

<u>TEOREMA DI STONE</u> (1936).

(i) $\forall \mathscr{I}$ ideale proprio, $\exists$ un ideale massimale $\supset \mathscr{I}$

(ii) $\forall \mathscr{F}$ filtro proprio, $\exists$ un ultrafiltro $\supset \mathscr{F}$

DIM. - Si considera l'insieme $\Phi_{\mathscr{F}} = \{\mathscr{F}' : \mathscr{F}'$ filtro ed $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'\}$ e si prova che e' induttivo rispetto alla relazione d'ordine $\subset$ (cioè si prova che ogni parte totalmente ordinata ammette sup. : se Φ è tot. ordinata e $\Phi \subset \Phi_{\mathscr{F}}$, il $\sup \Phi$ è il filtro generato dall' $\bigcup_{\mathscr{F}' \in \Phi} \mathscr{F}'$). Per il Teorema di Zorn $\Phi_{\mathscr{F}}$ ammette un elemento massimale che è l'ultrafiltro cercato.

cvd

Non si conoscono dimostrazioni effettive (cioé non basate sull'assioma della scelta) di questo teorema.

Osservazione 1. - Vi è una bigezione tra gli ideali massimali, gli ultrafiltri, gli omomorfismi a 2 valori e le misure a due valori. Infatti se $\mathscr{F}$ è un ultrafiltro, il suo duale è un ideale massimale, $h(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \in \mathscr{F} (1, 0 \in A) \\ 0 & \text{se } A \notin \mathscr{F} \end{cases}$ è un omomorfismo a 2 valori e $m(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \in \mathscr{F} \\ 0 & \text{se } A \notin \mathscr{F} \end{cases}$ è una misura a 2 valori e viceversa.

§5 - Legame con gli anelli algebrici.

$\emptyset \neq A$ con $(+,.)$ è detto anello (in senso algebrico) se e solo se

(R1) $A + B = B + A$ (commutatività di +)

(R2) $A + (B+C) = (A+B) + C$ (associatività di +)

(R3) Dato A e C $\exists!$ B $\ni'$ $A+B = C$ (esistenza dello zero e dell'opposto)

(R4) $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$ (associatività di .)

(R5) $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ } distributività

(R6) $(A+B)\cdot C = A\cdot C+B\cdot C$

Dai primi 3 segue che $\exists\, 0$ (zero) $\in \mathscr{A} \ni'$ $A+0 = A$.

Un elemento $1 \in \mathscr{A}$ è detto l'unità di $\mathscr{A} \overset{\text{def}}{\iff} A\cdot 1 = A = 1\cdot A \quad \forall A \in \mathscr{A}$.

L'anello è commutativo $\iff A\cdot B = B\cdot A$.

L'anello è un anello Booleano se contiene l'unità e $A\cdot A = A \quad \forall A$.