PROP. 4' - Se $\mathscr{B} \neq \emptyset$ e se $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ è il filtro generato da $\mathscr{B}$ allora $\mathscr{F}(\mathscr{B}) = \{A \in \mathscr{A} : \exists A_1,\ldots,A_n \in \mathscr{B}: A_i \cap \ldots \cap A_n \subset A\}$; deve pertanto essere $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$ se non si vuole che sia $\mathscr{F}(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$.
L'$\cap$ di filtri é un filtro, mentre $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ non é detto che sia un filtro.

ESEMPI A) Se $C \in \mathscr{A}$: $\{A \in \mathscr{A} : A \subset C\} = \mathscr{I}(c)$ è un ideale (generato da C) detto principale. Dualmente $\{A \in \mathscr{A} : A \supset C\}$ è un filtro (generato da C) e detto principale.

B) Sia $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ con X infinito. $\{A \subset X : A \text{ finito}\}$ è un ideale non principale. $\{A \subset X : A' \text{ finito}\}$ è un filtro non principale.

C) $m : \mathscr{A} \to [0,+\infty]$, dove $\mathscr{A}$ è un'algebra Booleana, è detta una misura(*) se $\exists A_0 \in \mathscr{A} \ni' m(A_0) < +\infty$ e $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ se $A \cap B = 0$ e $A,B \in \mathscr{A}$

$$\{A \in \mathscr{A} : m(A) = 0\} \text{ è un ideale.}$$

§ 3- Omomorfismi, isomorfismi.

DEFINIZIONE 11 - Date due algebre Booleane $\mathscr{A}$ ed $\mathscr{A}_1$ l'applicazione $h : \mathscr{A} \to \mathscr{A}_1$ è detta omomorfismo se e solo se

(a) $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$

(a') $h(A \cap B) = h(A) \cap h(B)$

(b) $h(-A) = -h(A)$

(basta (b) e una delle due : (a) o (a')).

Segue facilmente:

PROP. 6 - $h(A-B) = h(A) - h(B)$; $h(0) = 0$; $h(1) = 1$; $A \subset B \Rightarrow h(A) \subset h(B)$.

PROP. 7 - $h(\mathscr{A})$ è una sottoalgebra di $\mathscr{A}_1$

$h^{-1}(\mathscr{I})$ è un ideale di $\mathscr{A}$, se $\mathscr{I}$ è un ideale di $\mathscr{A}_1$

$h^{-1}(\mathscr{F})$ è un filtro di $\mathscr{A}$, se $\mathscr{F}$ è un filtro di $\mathscr{A}_1$.

(*) Qui chiameremo misura le funzioni finitamente additive, mentre chiameremo σ-misure quelle numerabilmente additive, in analogia con le parole algebre e σ-algebre.

Mentre se $\mathscr{I}$ è un ideale di $\mathscr{A}$ non è detto che lo sia $h(\mathscr{I})$ (questo perché se $A' \in h(\mathscr{I})$ e $B' \subset A'$ non è detto che sia $B' \in h(\mathscr{I})$).

DEFINIZIONE 12 - h <u>isomorfismo</u> $\iff$ h omomorfismo ed h ingettiva.

Nel caso in cui h è un isomorfismo surgettivo allora $\mathscr{A}$ ed $\mathscr{A}_1$ si dicono <u>isomorfe</u>.

In tal caso h^{-1} è un isomorfismo di $\mathscr{A}_1$ su $\mathscr{A}$.

PROP. 8 - $h : \mathscr{A} \to \mathscr{A}_1$: h isomorfismo) $\iff$ (h omomorfismo e $h^{-1}(0) = 0$)

(o equivalentemente $h(A) = 0 \implies A = 0$)

<u>ESEMPIO</u> - Con riferimento all'esempio B) del §1, $\mathscr{A}_1$ ed $\mathscr{A}_2$ sono isomorfe mediante $h(A) = \mathring{A} \quad \forall A \in \mathscr{A}_1$.

§4 - <u>Ideali e filtri massimali</u> (o <u>ultrafiltri</u>).

DEFINIZIONE 13 - <u>Un ideale</u> <u>(filtro)</u> proprio di $\mathscr{A}$ è detto <u>massimale</u> se non è strettamente contenuto in un altro ideale (filtro) proprio di $\mathscr{A}$.

PROP. 9 - $\mathscr{I}$ ideale ($\mathscr{F}$ filtro) massimale $\iff \forall A \in \mathscr{A}$: A oppure $-A \in \mathscr{I} (\in \mathscr{F})$ dove l'oppure è esclusivo.

DIM.- Intanto non può essere A e $-A \in \mathscr{I}$ altrimenti $A \cup (-A) = 1 \in \mathscr{I}$ ed $\mathscr{I}$ non è un ideale proprio. Se poi per assurdo $\exists\, A \in \mathscr{A} \ni'$ né A né -A appartengono ad $\mathscr{I}$ allora detto $\mathscr{I}_0$ l'ideale generato da $\{\mathscr{I}, A\}$ risulta $\mathscr{I}_0$ proprio $\supset \mathscr{I}$.

cvd

<u>TEOREMA DI STONE</u> (1936).

(i) $\forall \mathscr{I}$ ideale proprio, $\exists$ un ideale massimale $\supset \mathscr{I}$

(ii) $\forall \mathscr{F}$ filtro proprio, $\exists$ un ultrafiltro $\supset \mathscr{F}$

DIM. - Si considera l'insieme $\Phi_{\mathscr{F}} = \{\mathscr{F}' : \mathscr{F}' \text{ filtro ed } \mathscr{F} \subset \mathscr{F}'\}$ e si prova che e' induttivo rispetto alla relazione d'ordine $\subset$ (cioé si prova che ogni