RISOLUBILITA' DELLA (1) COL DATO CONTINUO

Ritornando alle precedenti considerazioni a),b),c) delle pagine 5 e 6, relative alla condizione geometrica, osserviamo che è la validità della sola b) ad essere fortemente dipendente dalla ipotesi che l'equazione sia quella di Laplace. La b) discende infatti immediatamente dall'essere funzione armonica ogni limite uniforme di funzioni armoniche.

L'estensione della validità di questa proprietà ad equazioni più generali del tipo (1) ha un ovvio interesse ai fini di questa nostra trattazione.

Perciò riscriviamo la (1) nella forma

$$(1^*) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} D_i D_j F(Du(x)) D_i D_j u(x) = 0,$$

e guardiamo ad essa come ad un'equazione lineare del 2° ordine per la funzione u con coefficienti $a_{ij}(x) = D_i D_j F(Du(x))$, i quali ovviamente soddisfano la condizione di ellitticità (7), se F è di classe $\mathcal{C}^2$ e strettamente convessa. I parametri di ellitticità τ_1, τ_2 dipendono, oltre che dalla F, dal $\sup_x |Du(x)|$.

Volendo allora stabilire proprietà per i limiti di successioni $\{u_h\}$ di soluzioni di (1*) è facilmente intuibile, dopo quanto già esposto a proposito della (6), l'importanza della equilimitatezza dei gradienti, cioè della condizione

(14) $$\sup_h \sup_x |Du_h(x)| < +\infty \; .$$

L'ipotesi di convergenza uniforme per $\{u_h\}$ implicando

(15) $$\sup_h \sup_x |u_h(x)| < +\infty \quad ,$$

c'interesseremo di stabilire condizioni sufficienti a garantire la validità dell'implicazione (15) $\to$ (14), che chiameremo semplicemente STIMA DEL GRADIENTE.

STIMA DEL GRADIENTE PER L'EQUAZIONE DELLE SUPERFICIE MINIME.

Nel caso particolare dell'equazione delle superficie minime, cioè nel caso $F(p) = \sqrt{1+|p|^2}$, vale, per un'opportuno $c(n) \in R$,

(16) $$|Du(x_o)| \leq \exp\left[c(n)d^{-1} \sup_{|x-x_o|<d} (u(x)-u(x_o))\right]$$

per ogni soluzione u di

(17) $$\operatorname{div} \frac{Du(x)}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}} = 0 \; , \; \forall \; |x-x_o| < d \; .$$

Della dimostrazione di (16) mi limiterò a indicare un passo, che garantisco essere fondamentale, e che è possibile grazie a considerazioni dello stesso tipo di quelle già esposte per la risoluzione del problema della regolarizzazione. Il passo consiste nella dimostrazione della seguente diseguaglianza: posto $v = (1+|Du|^2)^{-1/2}$, dove u verifica (17), e $\alpha(\rho,t) = H_n\{A_{\rho,t}\}$, dove $A_{\rho,t}$ è la componente connessa contenente $(x_o,u(x_o))$ della porzione di superficie $S = \text{graph } u$ verificante le $|x-x_o|^2 + |u(x)-u(x_o)|^2 < \rho^2$, $v(x) < t$, <u>vale</u>

$$\alpha(\rho,t) \geq c(n)\rho^n \left(\frac{t-t_o}{t}\right)^n, \quad \forall\, t \in [t_o,1] \quad . \tag{18}$$

DIMOSTRAZIONE DELLA (18).

Posto $\nu = (-Du,1)\left(\sqrt{1+|Du|^2}\right)^{-1}$, l'equazione (17) può scriversi nella forma

$$\sum_{i=1}^{n} D_i\nu_i = 0 \quad , \tag{17*}$$

e quindi anche, con la posizione $\delta_i = D_i - \nu_i \sum_{h=1}^{n+1} \nu_h D_h$,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i\nu_i = 0 \quad , \tag{19}$$

da cui, applicando δ_h e facendo qualche passaggio elementare, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i\delta_i\nu_h + c^2\nu_h = 0 \quad , \quad \text{con } c^2 = \sum_{i,j=1}^{n+1} (\delta_i\nu_j)^2 \quad . \tag{20}$$

La (20), per $h = n+1$, dà un'equazione per v

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i\delta_i v + c^2 v = 0 \quad , \tag{21}$$

da cui, per il fatto di essere $v > 0$, discende

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \delta_i \, v \leq 0 \quad . \tag{22}$$

Da questa diseguaglianza, di notevole interesse perchè l'operatore $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \delta_i$ è l'operatore di Laplace sulla superficie S , segue con non grande difficoltà (18). INFATTI:

posto $v_t = t - v$ sulla componente connessa di $\{v < t\} \cap S$ contenente $(x_o, u(x_o))$ e 0 altrove, ed essendo $\phi : R^{n+1} \to R$ di classe C^1 e nulla nei punti distanti da $(x_o, u(x_o))$ più di ρ , moltiplicando la (22) per $\phi^2 v_t$ e integrando su S otteniamo,

$$\sum_i \int_{A(\rho,t)} \phi^2 v_t \, \delta_i \delta_i v \, dH_n \leq 0 \Rightarrow \sum_i \int_{A(\rho,t)} \left[\phi^2 (\delta_i v)^2 + 2\phi v \delta_i \phi \delta_i v \right] dH_n \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{A(\rho,t)} \sum_i (\delta_i (\phi v))^2 dH_n \leq \int_{A(\rho,t)} \sum_i v (\delta_i \phi)^2 dH_n \quad .$$

Da questa e da una diseguaglianza del tipo (10) si ha

$$\left\{ \int_{A(\rho,t)} (\phi v)^{\frac{2n}{n-2}} dH_n \right\}^{\frac{n-2}{n}} \leq c(n) \int_{A(\rho,t)} v^2 |\delta \phi|^2 dH_n \quad ;$$

da cui, per ogni $\sigma \in (0,\rho)$, specializzando la scelta di ϕ , ricaviamo

$$\left\{ \int_{A(\rho-\sigma,t)} v^{\frac{2n}{n-2}} dH_n \right\}^{\frac{n-2}{n}} \leq c(n) \, \frac{t^2}{\sigma^2} \, \alpha(\rho,t) \quad .$$

Finalmente, per $\mu < t$,

$$(23) \qquad \mu^2 \alpha(\rho-\sigma, t-\mu)^{\frac{n-2}{n}} \leq c(n) \frac{t^2}{\sigma^2} \alpha(\rho, t) \quad .$$

Posto $b_k = \alpha\left(\rho - \rho/2 \cdot \sum_{i=1}^{k} 2^{-i},\ t - \frac{t-t_o}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} 2^{-i}\right)$ abbiamo, dalla (23),

$$b_{k+1}^{\frac{n-2}{n}} \leq \left(\frac{c}{\rho^2}\right)^{1+\frac{n}{n-2}+\left(\frac{n}{n-2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{n-2}\right)^k} \cdot 4^{k+(k-1)\frac{n}{n-2}+(k-2)\left(\frac{n}{n-2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{n-2}\right)^{k-1}} \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{t+t_o}{2}+\frac{t-t_o}{2^k}\right)^2 \left(\frac{t+t_o}{2}+\frac{t-t_o}{2^{k-1}}\right)^{2\frac{n}{n-2}} \left(\frac{t+t_o}{2}+\frac{t-t_o}{2^{k-2}}\right)^{2\left(\frac{n}{n-2}\right)^2} \cdots \left[\tilde{c}\rho^n\left(\frac{t-t_o}{t}\right)^n\right]^{\left(\frac{n}{n-2}\right)^{k-1}}$$

Se questa vale per $\tilde{C}$ abbastanza piccolo si ha $b_k \underset{k}{\to} 0$, che è assurdo. Ne ricaviamo che per tale $\tilde{C}$ deve essere vera la (18)!

B I B L I O G R A F I A

E.BOMBIERI - E. DE GIORGI - M. MIRANDA: *Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche*, Arch. for Rat.Mech. and Anal. 32 (1969), 255-267.

E. TOMAINI: *Singolarità delle ipersuperfici minimali e problema di Bernstein*, Tesi di Laurea in Matematica, Univ. di Ferrara, A.A.1980-81.

D. HILBERT: *Über das Dirichletsche Prinzip*; Math. Ann. 59 (1904), 161-186.

A. HAAR: *Über das Plateausche Problem*; Math. Ann. 97 (1927), 127-158.

E. DE GIORGI: *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*; Mem. Acc. Sci. Torino 3 (1957), 1-19.