

CALCOLO DELLE VARIAZIONI E TEORIA GEOMETRICA DELLA MISURA

Intendo parlare delle soluzioni deboli ottenibili col metodo diretto del CdV (Calcolo delle Variazioni) e della loro regolarizzazione, nella quale svolge un ruolo fondamentale la TGdM (Teoria Geometrica della Misura).

Il protagonista della prima parte di questo programma è l'integrale

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(Du(x)) dx ,$$

dove Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^n , $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è data e supposta convessa non negativa, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è da intendersi variabile.

Con D indichiamo l'operatore gradiente, cioè

$$Du(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) , \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) , \dots , \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right) .$$

Deve essere noto da almeno due secoli e mezzo, essendovi associato il nome di Eulero, il fatto che una funzione u regolare e minimizzante \mathcal{F} , sia pure sotto certe restrizioni, deve soddisfare l'equazione

$$(1) \quad \operatorname{div} \left\{ DF(Du(x)) \right\} = 0 , \quad \forall x \in \Omega .$$

E' però dovuta a Gauss, e non più vecchia di 150 anni, l'osservazione che la ricerca diretta del minimo di \mathcal{F} è un modo per risolvere l'equazione

(1). Fino a Gauss il legame fra il minimo di \mathcal{F} e la soluzione dell'equazione era stato utilizzato soltanto nella direzione opposta.

Oggi è quasi ozioso sottolineare la naturalezza del problema del minimo per un integrale come \mathcal{F} , cioè del minimo di una funzione reale sia pure di argomento funzionale. Tale problema si riduce a: data una successione di valori possibili $\{\mathcal{F}(u_j)\}$ tendente all'inf di tutti i valori possibili, dimostrare l'esistenza di un valore possibile per la variabile u tale che

$$(2) \quad \mathcal{F}(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_j)$$

Per risolvere tale problema è utile conoscere una condizione sufficiente perchè valga la (2), come è ad esempio:

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA SEMICONTINUITA' INFERIORE

Se i gradienti delle u_j e u sono integrabili su Ω e se vale

$$(3) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_Q Du_j(x) dx = \int_Q Du(x) dx, \text{ per ogni cubo } Q \subset \Omega, \text{ allora}$$

vale (2).

DIMOSTRAZIONE. Poichè F può essere vista come limite di una successione crescente di $\{F_\lambda\}$, tutte convesse positive ed aventi ciascuna gradiente limitato, possiamo assumere quest'ultimo fatto per la F stessa ai fini della nostra dimostrazione. Avremo allora che

$$\int_{\Omega} F(Du(x)) dx = \sup_{\{Q_k\}} \sum_k F\left(\int_{Q_k} Du(x) dx\right) \text{mis } Q_k$$

dove $\{Q_k\}$ è una qualunque famiglia finita di cubi di Ω , a due a due privi di punti interni in comune, e dove $\int_{Q_k} \cdot dx$ sta per $\left(\int_{Q_k} \cdot dx\right) (\text{mis } Q_k)^{-1}$.

Si tratta allora di confrontare $\sum_k F\left(\int_{Q_k} Du(x) dx\right) \cdot \text{mis } Q_k$ con le $\sum_k \int_{Q_k} F(Du_j(x)) dx$, per i diversi valori di j .

Per la convessità di F abbiamo:

$$F(Du_j(x)) \geq F\left(\int_{Q_k} Du(x) dx\right) + DF\left(\int_{Q_k} Du(x) dx\right) \cdot (Du_j(x) - \int_{Q_k} Du(x) dx),$$

e ciò qualunque siano x , k e j . Integrando allora su Q_k e sommando rispetto a k ricaviamo

$$\begin{aligned} \sum_k \int_{Q_k} F(Du_j(x)) dx &\geq \sum_k (\text{mis } Q_k) F\left(\int_{Q_k} Du(x) dx\right) + \\ &+ \sum_k DF\left(\int_{Q_k} Du(x) dx\right) \cdot \left(\int_{Q_k} Du_j(x) dx - \int_{Q_k} Du(x) dx\right). \end{aligned}$$

Da questa e da (3) segue facilmente la tesi.

Possiamo senz'altro dare un facile e al tempo stesso fondamentale
TEOREMA DI ESISTENZA DEL MINIMO PER \mathcal{F}

Se U è una famiglia di funzioni equilimitate insieme con i loro rapporti incrementali e chiusa rispetto alla convergenza uniforme allora

esiste il minimo di \mathcal{F} su U .

Il difetto grave delle funzioni minimizzanti offerte da questo teorema, ai fini della loro aspirazione a risolvere l'equazione (1) è che esse possono appartenere al "bordo" di U . Più precisamente se fra le condizioni per l'appartenenza ad U c'è il fatto che i rapporti incrementali debbano essere limitati da una costante K , non può escludersi in generale che la funzione minimizzante u abbia questo valore K come estremo dei suoi rapporti incrementali. Ciò verificandosi non è possibile fare sulla u tutte quelle operazioni che permettono di arrivare alla (1).

Questa difficoltà è superabile nei casi in cui i dati siano tali che la soluzione attesa deve avere rapporti incrementali limitati in modo prevedibile. In questo caso se la limitazione imposta ai rapporti incrementali delle funzioni di U è più larga non potrà presentarsi l'impasse che si è detto.

Nel caso in cui la famiglia U sia di funzioni alle quali venga richiesto, fra l'altro, di avere assegnati valori ϕ su $\partial\Omega$, è risolvibile la seguente:

CONDIZIONE GEOMETRICA. Esiste una costante M e per ogni $x \in \partial\Omega$ due vettori $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $|a| \leq M$, $|b| \leq M$, tali che

$$(4) \quad a \cdot (y-x) \leq \phi(y) - \phi(x) \leq b \cdot (y-x) \quad , \quad \forall y \in \partial\Omega .$$

Può infatti stabilirsi il seguente

SECONDO TEOREMA DI ESISTENZA DEL MINIMO PER \mathcal{F} .

Se F è strettamente convessa e Ω, ϕ verificano la condizione geometrica, allora esiste un'unica u minimizzante \mathcal{F} in U , dove U è l'insieme di tutte le funzioni lipschitziane aventi i valori ϕ su $\partial\Omega$.

Resta a questo punto da vedere se u risolve (1) o meno. Ciò è facile da verificarsi nel caso speciale $F(Du) = |Du|^2$. Dalla proprietà di minimo avendosi

$$\int_{\Omega} DF(Du) D\psi \, dx = 0, \quad \forall \psi \text{ lipschitziana e nulla su } \partial\Omega.$$

Scegliendo $\psi(x) = |x-y|^2/2n - \rho^2/2n$ per $|x-y| < \rho$, per $y \in \Omega$ e $\rho \leq \text{dist}(y, \partial\Omega)$ e appunto $F(Du) = |Du|^2$, ricaviamo

$$\int_{B_{\rho}(y)} Du \, D\psi \, dx = 0 \Rightarrow \int_{B_{\rho}(y)} u \Delta \psi \, dx = \int_{\partial B_{\rho}(y)} u \, D\psi \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \, dH_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{B_{\rho}(y)} u \, dx = \frac{\rho}{n} \int_{\partial B_{\rho}(y)} u \, dH_{n-1} \Rightarrow \frac{d}{d\rho} \int_{B_{\rho}(y)} u \, dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(y) = \int_{B_{\rho}(y)} u(x) \, dx \Rightarrow u \text{ è armonica!}$$

Sempre restando nel caso particolare dell'equazione di Laplace la restrizione imposta dalla condizione geometrica è allentata dalle seguenti considerazioni:

- a) la condizione geometrica è verificabile con calcolo elementare se Ω è una sfera e ϕ è un polinomio

- b) la risolubilità del problema con dato polinomiale implica, attraverso il teorema di Weierstrass e il principio del massimo, la risolubilità con un qualunque dato continuo
- c) il metodo del "balayage" permette di usare la risolubilità del problema sulla sfera per attaccare il problema su un aperto qualsiasi.

Tutto ciò è, come ripeto, vero nel caso particolare dell'integrale dell'energia. In generale la funzione offerta dal secondo teorema di esistenza e che nasce lipschitziana, aspetta di essere rivelata come più regolare. E questo passo è, in generale, nient'affatto banale.

REGOLARIZZAZIONE

Ritorniamo alla equazione integrale di cui sono soluzione i minimi di \mathcal{F} , cioè

$$(5) \quad \int_{\Omega} DF(Du(x)) D\psi(x) dx = 0 \quad .$$

Se ψ è nulla al di fuori di un compatto di Ω , allora per valori sufficientemente piccoli di $s \in \mathbb{R}$ e per ogni vettore unitario $\alpha \in \mathbb{R}^n$ avremo che anche $\psi(x-s\alpha)$ si annulla su $\partial\Omega$, per cui dalla (5) segue

$$\int_{\Omega} DF(Du(x)) \left[D\psi(x-s\alpha) - D\psi(x) \right] dx = 0$$

e quindi anche

$$\int_{\Omega} \left[DF(Du(x+s\alpha)) - DF(Du(x)) \right] \cdot D\psi(x) dx = 0 \quad .$$

Da questa, supponendo $F \in C^2$, si ha

$$0 = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 D_i D_j F \left(Du(x) + t \left[Du(x+s\alpha) - Du(x) \right] \right) dt D_i \left[u(x+s\alpha) - u(x) \right] D_j \psi(x) dx$$

In altre parole, i rapporti incrementali $v(x) = \frac{u(x+s\alpha) - u(x)}{s}$ soddisfanno un'equazione integrale del seguente tipo

$$(6) \quad 0 = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i v D_j \psi dx \quad ,$$

dove, per la convessità di F e la limitatezza di $|Du(x)|$, possiamo supporre

$$(7) \quad \tau_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \tau_2 |\xi|^2 \quad , \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 < +\infty \quad , \quad \forall \xi \in R^n .$$

La continuità hölderiana delle soluzioni v di (6) nell'ipotesi (7) può essere provata a partire dalla semplice assunzione della integrabilità di $|Dv|^2$ su Ω . A questo fine osserviamo innanzitutto che da (6) e (7) seguono, per $\gamma = (\tau_2/\tau_1)^2$,

$$(8) \quad \frac{\gamma}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int_{A(k) \cap B_{\rho_2}(y)} (v(x) - k)^2 dx \geq \int_{A(k) \cap B_{\rho_1}(y)} |Dv(x)|^2 dx \quad ,$$

$$(9) \quad \frac{\gamma}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int_{B_{\rho_2}(y) - A(k)} (v(x) - k)^2 dx \geq \int_{B_{\rho_1}(y) - A(k)} |Dv(x)|^2 dx \quad ,$$

per ogni $y \in \Omega$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \text{dist}(y, \partial\Omega)$, $k \in \mathbb{R}$, e dove si è posto $A(k) = \{x | v(x) > k\}$, $B_\rho(y) = \{x | |x-y| < \rho\}$.

Il ruolo delle (8) e (9) è straordinariamente efficace se si tiene conto della disequaglianza stabilita nel seguente:

LEMMA. Per ogni $n > 1$ esiste $\beta > 0$ tale che se v^2 e $|Dv|^2$ sono integrabili su Ω , se $y \in \Omega$, $0 < \rho < \text{dist}(y, \partial\Omega)$, e $2\text{mis}[A(k) \wedge B_\rho(y)] \leq \text{mis} B_\rho(y)$ allora

$$(10) \quad \beta \int_{A(k) \wedge B_\rho(y)} |Dv|^2 dx \geq \left\{ \text{mis}[A(k) \wedge B_\rho(y)] \right\}^{-\frac{2}{n}} \int_{A(k) \wedge B_\rho(y)} (v-k)^2 dx .$$

La dimostrazione di questo lemma è fondata su una relazione quantitativa fra una funzione e il suo gradiente, che può essere stabilita ricorrendo a considerazioni di Teoria Geometrica della Misura, e che è:

$$(11) \quad \frac{\omega_n}{1-2^{-1/n}} \int_{A(k,\rho)-A(\lambda,\rho)} |Dv| dx \geq (\lambda-k) \left[\min(A(\lambda,\rho), B_\rho(y) - A(k,\rho)) \right]^{\frac{n-1}{n}}$$

dove $\lambda > k$, $A(k,\rho) = A(k) \wedge B_\rho(y)$ e analogamente $A(\lambda,\rho)$ e dove ω_n è la misura della sfera unitaria di \mathbb{R}^n cioè $\omega_n = \text{mis} \{x \in \mathbb{R}^n | |x| < 1\}$.

Il punto di partenza per la (11) è

$$(12) \quad \int_{A(t,\rho)} |Dv(x)| dx = \int_t^{t_\infty} H_{n-1} \left\{ \partial A(s) \wedge B_\rho(y) \right\} ds .$$

Insieme con la (12) ricordiamo infatti che vale, come conseguenza della



proprietà isoperimetrica della sfera,

$$2\omega_n H_{n-1} \left\{ B_\rho(y) \cap \partial A(s) \right\} \geq \left\{ \text{mis} A(s, \rho) \right\}^{\frac{n-1}{n}} + \left\{ \text{mis} (B_\rho(y) - A(s, \rho)) \right\}^{\frac{n-1}{n}} - (\text{mis} B_\rho)^{\frac{n-1}{n}}$$

quindi anche, posto $\mu(s, \rho) = \min(A(s, \rho), B_\rho(y) - A(s, \rho))$

$$2\omega_n H_{n-1} (B_\rho(y) \cap \partial A(s)) \geq 2(\mu(s, \rho))^{\frac{n-1}{n}} - (2\mu(s, \rho))^{\frac{n-1}{n}}$$

da cui segue facilmente (11).

Il passaggio dalla (11) alla (10) è un esercizio di natura tecnica al quale non ritengo qui utile dedicare spazio. Essenziale è invece far vedere quale conseguenza può ricavarsi dalle (8) e (10):

CONSEGUENZA DELLE (8) E (10): $\forall \sigma \in (0, 1)$, posto

$$\theta = \min \left\{ (1-\sigma)^n \omega_n / 2, \left[\sigma^2 / (1+\gamma+\beta) 2^{n+2} \right]^n \right\}, \quad c^2 = (\theta \rho^n)^{-1} \int_{A(k, \rho)} (v-k)^2 dx,$$

vale l'implicazione:

$$(13) \quad \text{mis} A(k, \rho) < \theta \rho^n \Rightarrow \text{mis} A(k+\sigma c, \rho-\sigma \rho) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le successioni

$$\rho_h = \rho - \sigma \rho + 2^{-h} \sigma \rho, \quad k_h = k + \sigma c - 2^{-h} \sigma c.$$

Dalle (8) e (10) si ricava

$$\beta \gamma \sigma^{-2} \rho^{-2} 4^{h+1} \left[\text{mis } A(k_h, \rho_h) \right]^{2/n} \int_{A(k_h, \rho_h)} (v-k_h)^2 dx \geq \int_{A(k_h, \rho_{h+1})} (v-k_h)^2 dx$$

dove l'ultimo integrale è ovviamente maggiore di $\int_{A(k_{h+1}, \rho_{h+1})} (v-k_{h+1})^2 dx$ e di

$$4^{-(h+1)} \sigma^2 c^2 \text{mis } A(k_{h+1}, \rho_{h+1}) .$$

Avremo perciò

$$\rho^2 \cdot \sigma^4 c^2 \cdot 2^{-4(h+1)} \text{mis } A(k_{h+1}, \rho_{h+1}) \leq \gamma \beta \left[\text{mis } A(k_h, \rho_h) \right]^{2/n} \int_{A(k_h, \rho_h)} (v-k_h)^2 dx$$

Per induzione si hanno allora, per ogni intero h :

$$\begin{aligned} \text{mis } A(k_h, \rho_h) &\leq \theta \rho^n 2^{-2nh} , \\ \int_{A(k_h, \rho_h)} (v-k_h)^2 dx &\leq \theta \rho^n c^2 2^{-2nh} \end{aligned}$$

Dalle quali, ovviamente, segue (13).

Che la (13) sia il passo fondamentale sulla strada della regolarizzazione è evidenziato dal fatto che da essa può facilmente dedursi l'esistenza di $\eta \in (0,1)$ tale che:

$$\text{osc } v = \sup_{B_\rho(y)} v - \inf_{B_\rho(y)} v \leq (1-\eta) \text{osc } v_{4\rho} !$$