CAPITOLO VI

Principi variazionali.[1]

1. L'azione come generatrice del moto.

La generatrice $S(qq_0t)$ della trasformazione canonica di Hamilton Jacobi mette in relazione fra loro, come si è visto nei nn. precedenti, le variabili $q(t),p(t)$ relative ad un istante generico con le q_0p_0 corrispondenti all'istante iniziale. Stante l'arbitrarietà dell'istante iniziale si può anche dire che la funzione S mette in relazione i valori delle variabili canoniche relative a due istanti qualunque. Vi è così una differenza sostanziale fra la teoria di Hamilton Jacobi e le teorie lagrangiana o hamiltoniana le quali sono basate su equazioni differenziali, e quindi mettono in relazione fra loro i valori delle variabili relative a due istanti "infinitamente vicini".

Ciò suggerisce l'idea che la teoria di Hamilton Jacobi possa consentire di determinare il moto del sistema meccanico quando siano assegnate le configurazioni di queste relative a due istanti diversi t_1 e t_2. Il problema consiste quindi nel calcolare la funzione S.

Lungo il moto si ha

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial t} = \dot{p}_i q^i - H = \ell$$

e quindi

$$S(q_2q_1t_2) = \int^{t_2} \ell\,(q\dot{q}t)dt \quad .$$

Poiché, come si è visto nel n° 7 Cap. II se una trasformazione ha generatrice S la trasformazione inversa ha generatrice $-S$, si ha pure

$$\frac{dS(-t)}{dt_1} = \ell\,(q(t_1)\dot{q}(t_1)t_1)$$

---

[1] Questo capitolo ha carattere prevalentemente descrittivo.

e quindi in generale

$$(1.1) \qquad S(q_2 q_1 t_2 t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \ell(q(t)\dot{q}(t)t)dt \ .$$

La "azione" S è già stata incontrata nel n° 5 del Cap. IV.

Poiché nel membro destro non compaiono q_1 e q_2, è necessario mettere in evidenza che la espressione di S nella (1) va intesa nel senso che l'integrale va calcolato lungo il moto effettivo $q(t)$, che si svolge fra gli istanti t_1 e t_2 e fra le configurazioni $q(t_1)$ e $q(t_2)$ assegnate relativamente a questi istanti.

La funzione in (1) è determinata quando siano note le funzioni $q(t)$ nell'intervallo (t_1,t_2): ma le $q(t)$ sono proprio le incognite del problema. La difficoltà può essere superata se si riesce a determinare qualche proprietà che caratterizzi l'integrale (1) lungo la effettiva soluzione delle equazioni del moto, nella classe degli integrali calcolati con funzioni $q(t)$ arbitrarie.

Una caratterizzazione del genere viene data nel n° 3.

2. Alcuni spazi.

Si consideri un sistema meccanico ad n gradi di libertà.

E' conveniente introdurre alcuni spazi nei quali la descrizione del moto risulta particolarmente perspicua . A seconda degli aspetti che si vogliono mettere in evidenza conviene di volta in volta scegliere uno spazio diverso.

Nel seguito si useranno i tre spazi seguenti:

1) lo spazio delle configurazioni (spazio Q) avente dimensione n e nel quale i punti sono contrassegnati dalle n coordinate lagrangiane del sistema meccanico.

2) Lo spazio degli eventi (spazio QT) avente $n+1$ dimensioni, ottenuto dallo spazio Q con l'aggiunta dell'asse dei tempi.

3) Lo spazio delle fasi (spazio QP) avente $2n$ dimensioni, e nel quale i

punti sono contrassegnati dalle 2n coordinate canoniche del sistema meccanico.

Nello spazio Q ogni punto corrisponde ad una configurazione del sistema meccanico e viceversa, ogni configurazione del sistema possiede un punto rappresentativo in tale spazio.

Un moto del sistema è noto quando siano assegnate le coordinate lagrangiane in funzione del tempo, $q^i = \phi^i(t)$ e cioè quando sia assegnata nello spazio Q una curva, parametrizzata mediante t.

Per individuare un moto mediante le equazioni di Lagrange occorre assegnare, in corrispondenza ad un istante (iniziale) t_o, le 2n quantità $q^i(t_o)$ e $\dot{q}^i(t_o)$: occorre cioè assegnare nello spazio Q un punto Q_o e il vettore tangente in Q_o alla traiettoria che corrisponde al moto cercato.

Nel problema che si vuole affrontare, data, come sempre, la funzione lagrangiana, si assegnano invece due punti Q_1 e Q_2 dello spazio Q e due istanti t_1 e t_2 e si considera il moto nel quale il punto rappresentativo passa per Q_1 e Q_2 rispett. agli istanti t_1 e t_2.

3. Principi variazionali.

Si consideri due punti Q_1, Q_2 nello spazio Q e una curva Γ che li contenga. Si supponga che Γ sia la traiettoria (dello spazio Q) corrispondente ad un moto effettivo

$$q^i = \phi^i(t) \qquad (i = 1...n) \tag{3.1}$$

Le (1) sono ovviamente le equazioni parametriche di Γ e, stante la scelta del parametro t, esse forniscono pure la legge di percorrenza (legge oraria) del moto del punto che rappresenta il sistema meccanico nello spazio Q. Note le $q^i(t)$ sono note anche le $\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i$ e quindi, detti t_1 e t_2 gli istanti nei quali tale punto transita per Q_1 e Q_2, l'integrale:

$$S(q_1,q_2;t_1t_2) = \int_{\Gamma\, t_1}^{t_2} \ell\,(q\ \dot{q}\ t)dt \tag{3.2}$$

è noto su Γ. In partenza l'integrale (2) è quindi definito soltanto lungo l'effettiva soluzione (1) delle equazioni del moto.

Una volta definita la funzione S mediante l'integrale (2) è però possibile svincolarsi dal moto effettivo del sistema meccanico dato.

Si considerino infatti fissi gli istanti t_1 e t_2 e i punti Q_1 e Q_2 e si consideri una nuova curva $\bar{\Gamma}$ che congiunge i punti Q_1 e Q_2.

E' possibile ideare un moto lungo $\bar{\Gamma}$ nel modo seguente.
Si ponga una qualunque corrispondenza biunivoca e continua fra i punti di Γ e di $\bar{\Gamma}$. Poiché ad ogni punto di Γ corrisponde secondo le (1) un ben determinato istante, la corrispondenza introdotta fra Γ e $\bar{\Gamma}$ fa corrispondere ad ogni punto di $\bar{\Gamma}$ un ben determinato valore di t. In tal modo, anche se a priori non esiste una parametrizzazione di $\bar{\Gamma}$ mediante il tempo, passando attraverso Γ si possono scrivere per $\bar{\Gamma}$ equazioni parametriche nella forma:

$$\bar{q}^i = \alpha^i(t)$$

o anche, introducendo il divario fra Γ e $\bar{\Gamma}$

$$\bar{q}^i = \phi^i(t) + \beta^i(t)\ . \tag{3.3}$$

Le considerazioni precedenti possono essere generalizzate ancora.

Siano assegnati due punti dello spazio Q, $\bar{Q}_1$ e $\bar{Q}_2$ distinti da Q_1 e Q_2. Siano inoltre assegnati due istanti t_1' e t_2' distinti da t_1 e t_2 . Si indichino con Q_1' e Q_2' i punti di Γ relativi ai valori t_1' e t_2' rispett. del parametro t, cioè i punti per i quali nel moto effettivo, il punto rappresentativo transita agli istanti t_1' e t_2' .
Assegnata una curva $\bar{\Gamma}$ che passi per $\bar{Q}_1$ e $\bar{Q}_2$ si ponga una corrispon-

denza biunivoca fra l'arco di $\bar{\Gamma}$ connettente $\bar{Q}_1$ e $\bar{Q}_2$ e l'arco di Γ connettente Q_1' e Q_2'. Come nel caso precedente si può allora assegnare al detto arco su $\bar{\Gamma}$ una parametrizzazione del tipo(3').

A seconda della corrispondenza scelta fra Γ e $\bar{\Gamma}$ si ottengono diverse funzioni (3') e quind diverse leggi di percorrenza dell'arco di $\bar{\Gamma}$. In definitiva si ottengono su $\bar{\Gamma}$ infiniti moti (in generale fittizi).

Viceversa è ovvio che, a partire da Γ è possibile costruire una curva (3), assegnando le funzioni $\beta^i(t)$ cioè assegnando il vettore $\vec{\beta}(t)$ in corrispondenza ad ogni punto di Γ stessa.

La velocità del punto rappresentativo su $\bar{\Gamma}$ è

$$\dot{\bar{q}}^i = \dot{\phi}^i(t) + \frac{d\beta^i}{dt}$$

ossia

(3.4) $$\dot{\bar{q}}^i = \dot{q}^i + \frac{d\beta^i}{dt}$$

Indicata con $\delta f(t)$ la differenza dei valori di una funzione f calcolati su $\bar{\Gamma}$ e su Γ per lo stesso istante t(variazione sincrona), si scrivano (3) e (4) nella forma:

(3.5) $$\delta q^i = \beta^i$$

(3.6) $$\delta \dot{q}^i = \frac{d\beta^i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q^i \quad .$$

Quest'ultima relazione si può scrivere

(3.6') $$\delta \frac{dq^i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q^i$$

che mostra che le operazioni δ e $\frac{d}{dt}$ sono commutabili.

La definizione dell'integrale (2) per moti "fittizi", permette di caratterizzare tale integrale lungo i moti effettivi: tale caratterizzazione si otterrà confrontanto il valore dell'integrale (2) relativo al moto effettivo con i valori dello stesso integrale relativi a tutti i possibili moti fittizi che differiscono "di poco" da quelli effettivi. Con questa ultima espressione si intende dire che i moti fittizi di confronto vengono presi su curve $\bar{\Gamma}$ "infinitamente vicine" a e per moti (3) "infinitamente vicini" al moto(1).

Pertanto saranno considerate infinitesime le quantità $\delta t_1 \equiv t_1' - t_1$ e $\delta t_2 \equiv t_2' - t_2$. Per esempio per esprimere la classe delle curve $\bar{\Gamma}$ e i moti di esse, si può introdurre un parametro ε, di cui si considerino solo valori tendenti a zero, in modo che si possa scrivere $\beta^i(t) = \varepsilon\, \eta^i(t)$, dove le η^i sono funzioni opportune.

Si ha così: $\bar{q}^i(t) = q^i(t) + \varepsilon\, \eta^i(t)$; $\dot{\bar{q}}(t) = \dot{q}^i(t) = \varepsilon\, \dot{\eta}^i(t)$ cioé $\delta q^i = \varepsilon\, \eta^i$; $\delta \dot{q}^i = \varepsilon\, \dot{\eta}^i$.

Nel seguito si continuerà però ad usare la notazione δq^i, $\delta \dot{q}^i$.

Si ha ora:

$$S_{\bar{\Gamma}} - S_\Gamma = \int_{\bar{\Gamma} t_1'}^{t_2'} \ell(\bar{q}\ \dot{\bar{q}}\ t)dt - \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \ell(q\ \dot{q}\ t)dt =$$

$$= \int_{\bar{\Gamma} t_1'}^{t_1} \ell(\bar{q}\ \dot{\bar{q}}\ t)dt + \int_{\bar{\Gamma} t_1}^{t_2} \ell(\bar{q}\ \dot{\bar{q}}\ t)\ dt + \int_{\bar{\Gamma} t_2}^{t_2'} \ell(\bar{q}\ \dot{\bar{q}}\ t)dt - \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \ell(q\ \dot{q}\ t)dt$$

$$= \int_{\bar{\Gamma} t_1'}^{t_1} \ell(\bar{q}\ \dot{\bar{q}}\ t)dt + \int_{\bar{\Gamma} t_2}^{t_2} \ell(\bar{q}\ \dot{\bar{q}}\ t)dt + \int_{\bar{\Gamma} t_1}^{t_2} \ell(q\ \dot{q}\ t)\Big|_\Gamma dt +$$

$$+ \int_{\bar{\Gamma} t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q^i}\Big|_\Gamma \delta q^i + \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i}\Big|_\Gamma \delta \dot{q} \right)dt - \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \ell(q\ \dot{q}\ t)dt \quad .$$

Si considerino il terzo e il quinto integrale. Nel primc di questi due la funzione ℓ è cal'olata su Γ (e non su $\bar{\Gamma}$). Inoltre sulle due curve si è stabilita ına corrispondenza biunivoca che associa i due punti (uso su Γ, l'alt su $\bar{\Gamma}$) corrispondenti allo stesso valore di t. Perciò l'elemen o di Γ corrispondente ad ur determinato valore di t contribuisce nell'ultimo integrale con il termine $-\ell(q\dot{q}t)dt$ e c'è un elemento di $\bar{\Gamma}$ che contribuisce, mediante il terzo integrale, con il termine $\ell(q\,\dot{q}\,t)dt$ relativo allo stesso valore d' t. Poiché in entrambi gli integrali t varia fra gli stessi estremi t_1 e t_2, i due integrali hanno somma nulla; in sostanza, in virtù del a corrispondenza scelta, nel terzo integrale sparisce ogni traccia della curva $\bar{\Gamma}$. Poiché considerazioni analoghe possano farsi per il quarto integrale, si ha:

$$S_{\bar{\Gamma}} - S_{\Gamma} = \int_{\bar{\Gamma}t_1'}^{t_1} \ell(\bar{q}\,\dot{\bar{q}}t)dt + \int_{\bar{\Gamma}t_2}^{t_2'} \ell(\bar{q}\dot{\bar{q}}t)dt + \int_{\Gamma t_2}^{t_2} \left(\frac{\partial\ell}{\partial q} \delta q^i + \frac{\partial\ell}{\partial\dot{q}^i} \delta\dot{q}^i\right)dt.$$

I primi due integrali, poiché gli intervalli temporali $t_1' - t_1$ e $t_2' - t_2$ sono infinitesimi, possono essere sostituiti rispett. con $-\delta t_1$ e con δt_2. Nell'ultimo integrale si può eseguire una integrazione parziale del secondo termine:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \, \delta \dot{q}^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \, \delta \, \frac{dq^i}{dt} \, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \, \frac{d}{dt} \, \delta q^i dt = \delta q^i \, \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \, \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \, \delta q^i dt \quad .$$

Raccogliendo si ha:

$$S_{\bar{\Gamma}} - S_{\Gamma} = \ell \delta t_2 - \ell \delta t_1 + \delta q^i \, \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i}\Big|_{t_2} - \delta q^i \, \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i}\Big|_{t_1} + \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \, \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt \quad . \tag{3.7}$$

Le variazioni δq^i sono le differenze fra i valori delle q^i calcolati nello stesso istante t.

Conviene introdurre le variazioni delle coordinate relative agli estremi $Q_1, \bar{Q}_1$ e $Q_2, \bar{Q}_2$ dei due archi di Γ e di $\bar{\Gamma}$. Si ha per es. per il primo estremo:

$$\bar{q}^i(t_1') - q^i(t_1) = \bar{q}^i(t_1 + \delta t_1) - q^i(t_1) =$$

$$= \bar{q}^i(t_1) + \dot{\bar{q}}^i(t_1)\delta t_1 - q^i(t_1) = \delta q^i(t_1) + \dot{\bar{q}}^i(t_1)\delta t_1$$

$$= \delta q^i(t_1) + (\dot{q}^i(t_1) + \delta \dot{q}^i(t_1))\delta t_1 \quad .$$

Nei due estremi, quindi, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta q^i(t_1) &\equiv \bar{q}^i(t_1') - q^i(t_1) = \delta q^i(t_1) + \dot{q}^i(t_1)\delta t_1 \\ \Delta q^i(t_2) &\equiv \bar{q}^i(t_2') - q^i(t_2) = \delta q^i(t_2) + \dot{q}^i(t_2)\delta t_2 \end{aligned} \right. \tag{3.8}$$

La (7) si scrive allora, ponendo $\Delta S \equiv S_{\bar{\Gamma}} - S_{\Gamma}$

$$\Delta S = \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt + \ell \delta t_2 - \ell \delta t_1$$

$$+ [p_i(\Delta q^i - \dot{q}^i)]_{t_2} - [p_i(\Delta q^i - \dot{q}^i)]_{t_1}$$

dove si è posto, al solito, $p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$. Introducendo la funzione hamiltoniana $h = p_i \dot{q}^i - \ell$ si ha infine:

$$\Delta S = \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt - h \Delta t_2 + h \Delta t_1 + p_i \Delta q^i \Big|_{t_2} - p_i \Delta q^i \Big|_{t_1} . \tag{3.9}$$

In particolare, se Γ e $\bar{\Gamma}$ hanno gli stessi estremi $Q_1 = \bar{Q}_1$ e $Q_2 = \bar{Q}_2$, si ha:

$$\Delta S = \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt \tag{3.10}$$

La (10) fornisce una possibile caratterizzazione dell'integrale (2) relativo ai moti effettivi. Infatti se il moto su Γ è un moto effettivo le quantità in parentesi sono nulle in virtù delle equazioni di Lagrange e quindi si ha:

$$\Delta S_{\Gamma} = 0 \tag{3.11}$$

La (11) esprime la stazionarietà dell'integrale (2). Il risultato si può esprimere nel modo seguente:

L'azione S è stazionaria rispetto a variazioni sincrone fra estremi fissi.

L'enunciato precedente va sotto il nome di principio di Hamilton(1).

Tornando alla (9) si vede che se Γ è una traiettoria sulla quale sono soddisfatte le equazioni di Lagrange, si ha:

$$\Delta S = (p_i \Delta q^i - h\Delta t)_2 - (p_i \Delta q^i - h\Delta t)_1. \tag{3.12}$$

Le derivate di S sono quindi

$$\left.\frac{\partial S}{\partial q^i}\right|_1 = -\left.p_i\right|_1 \quad ; \quad \left.\frac{\partial S}{\partial q^i}\right|_2 = \left.p_i\right|_2$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_1 = \left.h\right|_1 \quad ; \quad \left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_2 = \left.h\right|_2$$

L'ultima di queste è l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$h + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{3.13}$$

E' immediato riconoscere che la trattazione precedente può essere fatta anche nello spazio QT: in questo spazio, come è ovvio, la parametrizzazione di una curva Γ mediante t non richiede alcuna precisazione, ed è soggetta alle solite condizioni che intervengono quando si parametrizza una curva mediante una coordinata.

Le (1) in questo caso rappresentano le equazioni parametriche della proiezione della curva Γ nello spazio Q; interpretate nello spazio

---

(1) Si può riottenere la meccanica hamiltoniana assumendo il principio di Hamilton come punto di partenza. La variazione di S fra estremi fissi è data dalla (10). Postulando che per i moti effetfivi sia $\Delta S = 0$ si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \ell}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i dt = 0$$

In base al lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (v.per es. [1]Vol. I pag. 185 nelle ipotesi poste per le δq^i, si annullano le quantità in parentesi e cioè sussistono le equazioni di Lagrange.

QT sono invece direttamente le equazioni parametriche della curva.

Una trattazione analoga può essere fatta nello spazio delle fasi, come ora si accennerà rapidamente.

L'integrale (2) nello spazio delle fasi va scritto:

$$V_\Gamma = \int_{\Gamma t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}^i - h(qp)]dt$$

dove Γ è una curva nello spazio QP.

Per variazioni delle variabili indipendenti qp, si ottiene una nuova curva $\bar{\Gamma}$ percorsa con legge oraria dipendente dalle variazioni assegnate.

Risulta, con calcoli analoghi ai precedenti:

$$\Delta V = V_{\bar{\Gamma}} - V_\Gamma = \int_{\Gamma t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - h)dt - \int_{\Gamma t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - h)dt =$$

$$= \int_{\Gamma t_1}^{t_2} (\dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial h}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial h}{\partial q^i} \delta \dot{q})dt$$

$$+ \left|(p_i \dot{q}^i - h)\Delta t\right|_{t_1}^{t_2} = \int_{\Gamma t_1}^{t_2} \left|(\dot{q}^i - \frac{\partial h}{\partial p_i})\delta p_i - (p_i + \frac{\partial h}{\partial q^i})\delta q^i\right| dt +$$

$$+ \left|p_i \delta q^i + (p_i \dot{q}^i - h)\Delta t\right|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left|(\dot{q}^i - \frac{\partial h}{\partial p_i})\delta p_i + (p_i + \frac{\partial h}{\partial q^i})\delta q^i\right| dt + \left|(p_i \Delta q_i - h\Delta t)\right|_{t_1}^{t_2}$$

dove le Δq sono definite dalle (8).

Come si vede, il sussistere delle equazioni di Hamilton riduce la variazione di V alla variazione fra gli estremi data dall'ultimo termine.

D'altra parte le equazioni di Hamilton conducono al seguente principio: l'azione V è stazionaria rispetto a variazioni sincrone fra estremi fissi.

Viceversa, postulando che l'azione, calcolata fra estremi fissi, sia stazionaria e valendosi del lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, si ottengono le equazioni di Hamilton.

4. Estremali. Estremali trasverse a una famiglia di superfici.

D'ora in poi ci si porrà sistematicamente nello spazio QT. Le curve di questo spazio sulle quali si annulla l'integrale (3.9) sono dette estremali dal problema variazionale.

Va ricordato che l'espressione integrale (1.1) di S è da intendersi nel senso che l'integrale è calcolato su una curva congiungente Q_1 e Q_2 e corrispondente all'effettivo moto del sistema: in altri termini, l'integrale è calcolato su un arco di estremale congiungente Q_1 e Q_2. Anche la variazione (3.12) va intesa come variazione di S quando ci si sposti da un arco di estremale ad un altro i cui estremi sono legati agli estremi del primo arco dai differenziali che figurano in detta formula.

Nel seguito si assumerà l'ipotesi aggiuntiva che ogni coppia di punti A, B nello spazio QT possa essere congiunta da una sola estremale. Ciò vuol dire che assegnati $t_A q_A^i$ $(i = 1...n)$ fra le ∞^n estremali uscenti da A (corrispondenti agli ∞^n modi di assegnare le restanti condizioni iniziali del moto per $t = t_A$ e cioé le $\dot{q}^i(t_A)$) esiste una e una sola estremale passante per il punto, pure assegnato, B e cioé esiste uno e un solo moto per il quale il sistema partendo dalle configurazioni q_A all'istante t_A, raggiunge la configurazione q_B all'istante t_B.

Il valore di $S(AB)$ verrà detto <u>distanza geodetica fra A e B.</u>

Si osservi ancora che, la funzione S è soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi come è espresso dalla (3.13) e quindi le soluzioni $q^i(A)$ del sistema caratteristico associato, che in questo caso (I n° 5) ha forma canonica, sono curve caratteristiche della stessa equazione (3.13).

La"inclinazione" della generica estremale è data, in ogni punto, dalle $\dot{q}^i$ calcolate in quel punto. L'inclinazione delle estremali può pure essere data assegnando le p_i, che, in virtù delle (1.4) e (1.3') Cap.III sono legate biunivocamente alle $\dot{q}^i$. Perciò tanto le soluzioni delle equazioni di Lagrange, quando le soluzioni delle equazioni di Hamilton possono essere usate, come è ovvio, per individuare una generica estremale.

Si torni a prendere in esame una coppia di punti A,B appartenenti allo spazio QT.

Sia Σ una superficie passante per A e si considerino tutte le estremali congiungenti B con i punti di Σ. E' possibile definire una distanza geodetica di B da Σ come si è definita la distanza geodetica di B da A. Sia $\bar{A} \in \Sigma$ un punto tale che la distanza geodetica $S(PB)$ sia stazionaria in $\bar{A}$ al variare di P sulla superficie in un intorno di A.

Sia $S(PB)$ stazionaria in A quando B è fisso; allora nella (3.12) scritta nella forma:

$$\Delta S = (p_i \Delta q^i - h\Delta t)_B - (p_i \Delta q^i - h\Delta t)_P$$

bisogna porre $\qquad \Delta S = 0 \qquad \Delta q^i/_B = 0 \quad , \quad \Delta t/_B = 0$

e quindi si ha per $P = \bar{A}$

$$h(q\ p\ t)\Delta t - p_i \Delta q^i = 0 \quad . \tag{4.1}$$

D'altra parte se

$$X(q\ t) = 0 \tag{4.2}$$

è l'equazione di Σ, si ha pure

$$\frac{\partial X}{\partial q^i}\,\Delta q^i + \frac{\partial X}{\partial t}\,\Delta t = 0 \quad . \tag{4.3}$$

Nella (1) gli $n+1$ differenziali non sono indipendenti perché debbono soddisfare alla (3) che esprime l'appartenenza del punto alla superificie Σ.

Moltiplicando la (3) per un fattore λ indeterminato e sommandola alla (1) si ha

$$(h + \lambda \frac{\partial X}{\partial t}) \Delta q^i + (-p_i + \lambda \frac{\partial X}{\partial q^i})\Delta t = 0 \quad .$$

Se si sceglie λ in modo che uno dei coefficienti dei differenziali sia nullo, a sinistra resta una combinazione lineare di n differenziali indipendenti, i cui coefficienti debbono quindi essere nulli.

Si hanno così le condizioni:

$$\frac{h}{\frac{\partial X}{\partial t}} = \frac{-p_i}{\frac{\partial X}{\partial q^i}} \tag{4.4}$$

o anche in termini del lagrangiano

$$\frac{\ell - \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}{\frac{\partial X}{\partial t}} = \frac{-p_i}{\frac{\partial X}{\partial q^i}} \tag{4.5}$$

Le (4) (o le (5) costituiscono le cosiddette condizioni di trasversalità dell'estremale rispetto alla superficie Σ. L'estremale che soddisfa tali condizioni si chiama "trasversa" rispetto a Σ. Il valore di $S(B\,\bar{A})$ si dice <u>distanza geodetica</u> di B dalla superficie Σ o <u>iconale</u>: l'iconale misura quindi la distanza geodetica stazionaria di B dalla superficie Σ.

Se per ogni punto di una regione intorno alla superficie Σ si può portare un'estremale trasversa, si dice che si ha un campo di estremali. Allora ad ogni punto B, di questa regione corrisponde uno e un sol punto di Σ e cioé quello dal quale esce l'estremale trasversa passante per B.

In particolare un campo di estremali associa ad ogni punto della regione considerata un vettore p_i.

Se, lasciando fissi A e B, si considera una nuova superficie, ancora passante per A, ma distinta da Σ, la distanza geodetica di B da questa nuova superficie, sarà in generale diversa dalla precedente e sarà differente l'estremale per B sulla quale tale distanza è stazionaria: si ottiene così un nuovo campo di estremali e precisamente il campo delle estremali trasverse alla nuova superficie.

Così proseguendo si vede che ogni estremale per B è trasversa ad una certa superficie passante per A: se si cambia la direzione dell'estremale passante per B si trova, mediante la corrispondenza individuata dalla trasversalità, una superficie passante per A e viceversa, se si prendono superfici diverse passanti per A si trovano estremali diverse, ad esse trasverse e passanti per B(si confronti col n° 4 del Cap. II).

In conclusione si riconosce che nello spazio QT esistono ∞^n campi di estremali: ad ogni estremale per B corrisponde una superficie alla quale l'estremale stessa è trasversa e alla quale sono traverse tutte certe estremali "parallele" a quella passante per B.

In corrispondenza ad ogni estremale passante per B si ha perciò un campo di estremali diverso.

Un particolare campo di estremali può essere assegnato quindi dando una superificie alla quale esso è trasverso.

Naturalmente, in modo equivalente, un campo di estremali può essere dato assegnando un campo di vettori covarianti p_i soddisfacenti ad opportune condizioni che assicurino la validità dell'equazione di Hamilton Jacobi (v. n° 7).

Da quanto precede si riconosce che esistono ∞^n campi di estremali ed ogni campo è costituito a sua volta da ∞^n estremali: le estremali sono quindi in totale ∞^{2n} e infatti esse sono le soluzioni del sistema hamiltoniano. In sostanza un campo di estremali è costituito dal complesso delle soluzioni del sistema canonico ottenute prendendo "tutte le possibili q , corrispondenti ad un ben determinato campo di vettori p_i.

Poiché un campo di estremali è costituito da una famiglia di ∞^n curve, esso è rappresentato parametricamente dalle equazioni

$$q^i = \phi^i \quad (t\,;\ c_1 \ldots c_n) \tag{4.6}$$

dove $c_1 \ldots c_n$ sono i paran tri della famiglia.

Si consideri una superfi:ie Σ che possegga un campo di estremali trasverse. A partire da ogni punto della superficie, sulla estremale trasversa passante per il punto, si riporti, sempre dalla stessa parte rispetto alla superficie Σ, una distanza geodetica assegnata $\mathcal{a}$:

$$S = \int L \, d\, t = \mathcal{a}.$$

L'insieme dei punti B così ottenuti forma una superficie che si dice parallela a Σ. La superficie di partenza e la distanza assegnata individuano univocamente la nuova superficie.

L'equazione della nuova superficie è proprio

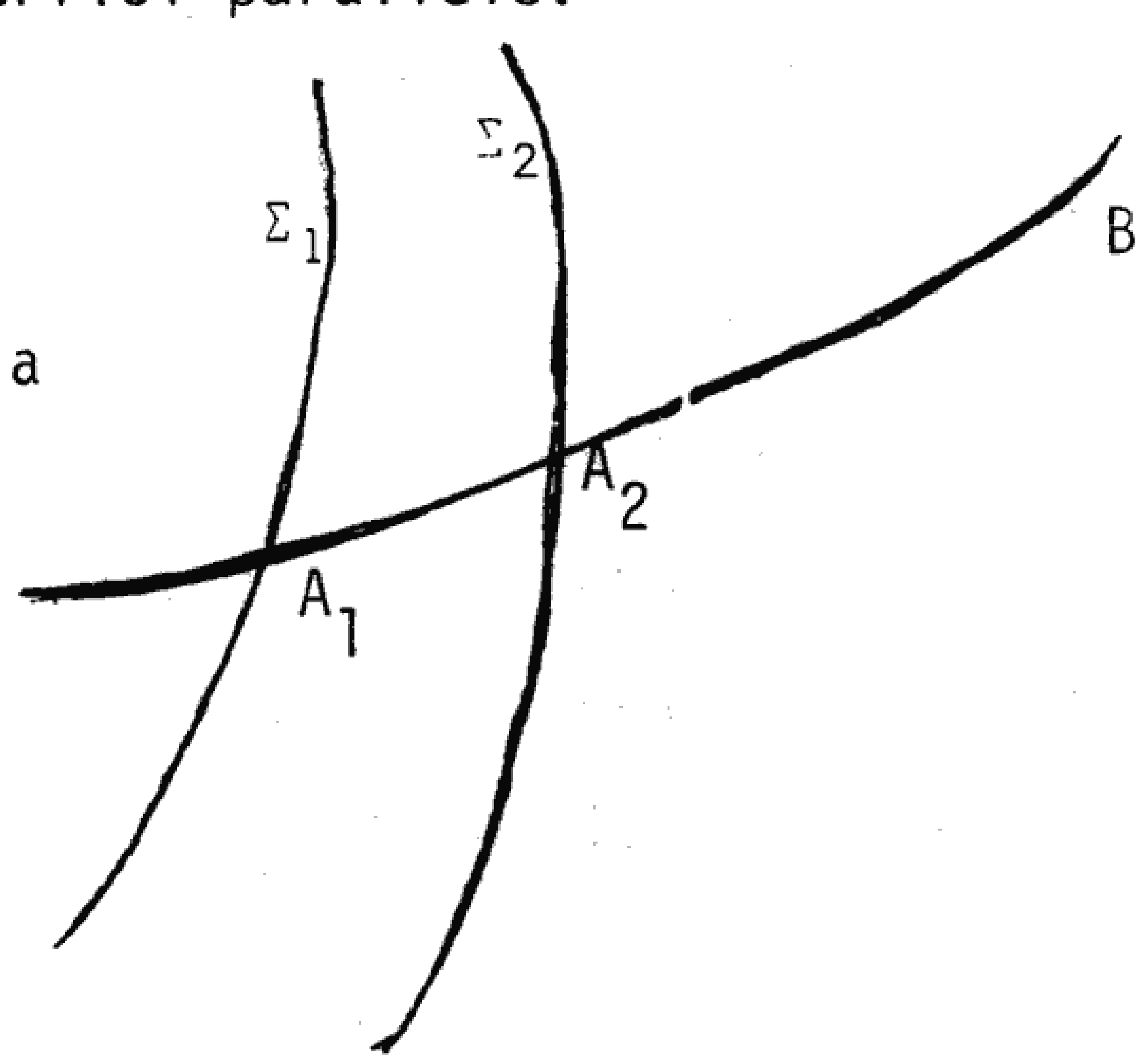
$$S = \mathcal{a}$$

mentre l'equazione di Σ è ovviamente

$$S = 0 \quad .$$

E' facile dimostrare il fatto prevedibile che le estremali trasverse a Σ sono trasverse a tutte le superfici che sono ad essa parallele secondo la definizione ora data.

Siano infatti Σ_1 e Σ_2 due superfici parallele.



Ciò vuol dire che $S(A_1\ A_2) = K$ dove K è costante quando A_1 varia arbitrariamente in Σ_1 e A_2 sia il punto di Σ_2 appartenente all'estremale trasversa a Σ_1 e uscente da A_1.
Se B è un altro punto sulla estremale per A_1 e A_2 si ha

$$\int_{A_1}^{B} \ell \, d\,t = \int_{A_1}^{A_2} \ell \, d\,t + \int_{A_2}^{B} \ell \, d\,t = K + \int_{A_2}^{B} \ell \, d\,t \, .$$

ossia

$$S(A_1B) = K + S(A_2B) \quad .$$

Poiché l'estremale A_1B è trasversa, si ha $\delta S(A_1B) = 0$. D'altra parte K è costante e quindi si ha:

$$\delta \; S(A_2B) = 0$$

che mostra che l'estremale A_2B,(cioé A_1B) è trasversa pure a Σ_2.

Il differenziale della distanza geodetica fra due punti (ossia della distanza misurata lungo la estremale che li congiunge) è espressa dalla (3.12). Nel caso della distanza geodetica di un punto da una superficie, il differenziale di S ha un significato diverso dal precedente. Infatti nel caso di due punti A,B le coordinate $t_A \, q_A$, $t_B q_B$ possono essere variate arbitrariamente: per es. uno dei due punti può essere tenuto fisso e si può far variare solo l'altro.

Nel caso della distanza di un punto da una superficie la situazione è diversa. Riprendendo la notazione precedente, se $B \notin \Sigma$, a B corrisponde un ben determinato punto $\bar{A} \in \Sigma$ e cioé quello appartenente all'estremale per B trasversa a Σ. Di conseguenza quando si varia B vi sono due possibilità: se B viene spostato lungo la stessa estremale trasversa, il punto $\bar{A}$ corrispondente non varia. Se B viene spostato invece al di fuori di questa estremale, occorre spostare anche $\bar{A}$: la nuova posizione di $\bar{A}$ è l'intersezione di Σ con la estremale trasversa passante per la nuova posizione di B. In entrambi i casi il contributo portato alla variazione di S dello spostamento di $\bar{A}$ è nullo. Ciò nel primo caso è banale, mentre nel secondo caso è conseguenza del fatto che ci si sposta da un'estremale trasversa a Σ ad un altra pur essa trasversa a Σ. Il contributo dato dallo spostamento di $\bar{A}$ è

$$h \; d \; t_{\bar{A}} - p_{i\bar{A}} \; d \; q^i_{\bar{A}} = 0$$

perché il vettore $(-d\, q^i_A\ , d\, t_{\bar{A}})$ tangente a Σ è trasverso al vettore (h,p_i) per la condizione (4.1).

Il differenziale dell'iconale è quindi

$$(4.6) \qquad dS = -\, h\, d\, t + p_i d\, q^i \quad .$$

Dalla (6) si ricava che le derivate dell'iconale sono

$$(4.7) \qquad \frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i \ ; \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -\, h$$

come nel caso della distanza geodetica fra due punti. Si vede così che l'iconale soddisfa all'equazione di Hamilton-Jacobi.

Sussiste anche la proprietà reciproca: se $S(q\cdot t)$ è una soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi, esiste un campo di estremali tutte trasverse alle superfici $S = \text{cost}$.

In questo caso S denota la distanza geodetica dalla superficie iniziale in questo campo di estremali.

Per dimostrare l'affermazione fatta, si parta da una soluzione S dell'equazione di Hamilton Jacobi e si definisca

$$(4.8) \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i} \quad .$$

Inoltre dalla stessa equazione si ha

$$(4.9) \qquad h(p\ q\ t) = -\, \frac{\partial S}{\partial t} \quad .$$

Si consideri il sistema differenziale

$$\dot{q}^i = \frac{\partial h}{\partial p_i}$$

sostituendo in h le (8) in luogo delle p_i: con ciò i secondi membri diventano funzioni di q e t soltanto.

La soluzione generale del sistema (10) consiste in una famiglia di ∞^n curve. Lungo queste curve le p_i sono allora funzioni del solo parametro t e si ha:

$$(4.11) \qquad p_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^k}\, \dot{q}^k + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t}$$

Derivando la (9) si ha poi

$$\frac{\partial S}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial h}{\partial q^i} + \frac{\partial h}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q^i} = 0$$

e usando le (8) e le (10)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial h}{\partial q^i} + \dot{q}^k \frac{\partial^2 S}{\partial q^k \partial q^i} = 0 \quad .$$

Confrontando con le (11) si ha infine:

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial h}{\partial q^i} \tag{4.12}$$

che con le (10) caratterizzano la famiglia di curve considerata, come una famiglia a n parametri di estremali.

Si osservi che si ha una famiglia ad n parametri e non a $2n$ parametri (come ci si potrebbe aspettare dato che il sistema (4.10), (4.12) è il sistema canonico), perché ci si è limitati al solo campo di estremali individuato dalla famiglia S = cost.

Si vede pur immediatamente che le estremali trovate sono trasverse rispetto alle superfici S.

5. Cenno sulla costruzione di HUYGENS.

Anche se in questa esposizione non si trattano problemi di ottica, la costruzione di Huygens è tanto vicina all'argomento svolto, che non si può fare a meno di dare un breve cenno.

Nel n° precedente, sfruttando il concetto di campo di (∞^n) estremali trasverse ad una superficie assegnata Σ si sono definite le superfici parallele a Σ come quelle che hanno in comune con Σ lo stesso campo di estremali trasverse. In questo n° si considera il problema duale del precedente.

Scambiando i termini della questione, si considerino tutte le estremali passanti per uno stesso punto B e si prenda su ogni estremale, a partire da B la stessa distanza geodetica a. Si ottiene così una superficie che ha come "centro" B e che è spontaneo definire "sfera geodetica" di raggio a. Al variare di a, le superfici $S = a$ sono le sfere geodetiche di centro B.

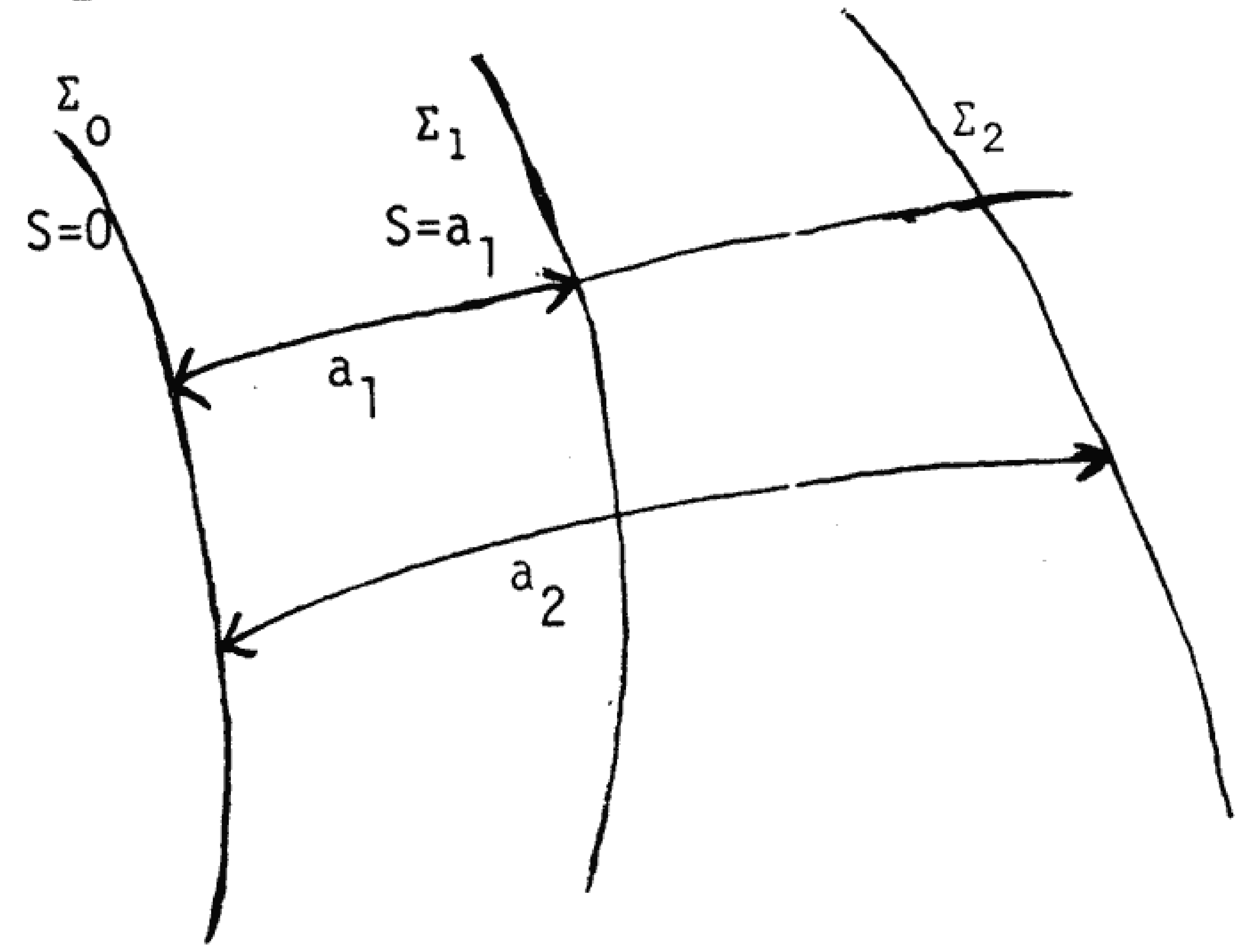
Le estremali uscenti da B appartengono a campi tutti diversi fra loro, perché ognuna di tali estremali è trasversa ad una diversa famiglia di superfici (va ricordato che data una superficie generica, da B esce una sola estremale trasversa ad essa). In particolare i campi p_i sono tutti diversi fra loro sulle diverse estremali che irradiano da B.

Assegnata una qualunque superficie Σ, sia B_1 il punto in cui essa è incontrata dalla estremale trasversa uscente da B. Sia poi a la distanza geodetica $B\,B_1$ e si consideri la sfera geodetica Ω e raggio a.

Si riconosce subito che le due superfici Σ e Ω sono tangenti in B_1. Che $B_1 \in \Omega$ è evidente perché Ω è il luogo dei punti aventi da B distanza geodetica a. Inoltre l'estremale $B\,B_1$, che per ipotesi è trasversa a Σ (e che quindi soddisfa su tale superficie alla condizione di trasversalità) è ovviamente trasversa anche ad Ω perché questa è una sfera e quindi la distanza da B di tutti i suoi punti è stazionaria. Le due superfici avendo lo stesso raggio trasverso in B_1 sono ivi tangenti, perché per entrambe il vettore $\delta q^i, \delta t$ è trasverso allo stesso vettore $p_i, -h$.

Si consideri ora una famiglia di superfici parallele e cioé aventi lo stesso campo di estremali trasverse.

Fissate due superfici Σ_1 e Σ_2 della famiglia, di equazioni rispettive $S = a_1$, $S = a_2$ si considerino le sfere geodetiche aventi i centri nei punti di Σ_1 e raggio comune $a_2 - a_1$. Per ogni punto $B \in \Sigma_1$ la



relativa sfera geodetica è tangente a Σ_2 nel punto in cui questa superficie è incontrata dall'estremale uscente da B e trasversa alla famiglia.

La superficie Σ_2 è quindi l'inviluppo delle sfere geodetiche aventi i centri in Σ_1 e raggio pari alla distanza geodetica fra Σ_1 e Σ_2 (costruzione di Huygens).

(Il breve cenno dato mette in evidenza che in certi casi le estremali uscenti da un punto B possono appartenere in realtà tutte ad uno stesso campo ed essere tutte trasverse ad una stessa superficie.

Questo fatto è fondamentale nella teoria dell'ottica ondulatoria.)

6. Integrale invariante di Hilbert.

L'espressione delle derivate di S permette di riconoscere che l'iconale è l'integrale di un differenziale esatto.

Nello spazio QT si connetta un punto (fisso) A con un punto (variabile) B, mediante una curva regolare $\mathscr{C}$. Si introduca la coordinata t come parametro su $\mathscr{C}$, e siano:

$$(6.1) \qquad q^i = \alpha^i(t) \qquad (i = 1...n)$$

le equazioni parametriche di $\mathscr{C}$.

Sia inoltre dato un campo di estremali

$$(6.2) \qquad q^i = \phi^i(t\ c_1 \ldots c_n)$$

(v. (4.6)).

Per ogni funzione F della posizione B sussiste la espressione:

$$(6.3) \qquad F(B) = F(A) + \int_A^B \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}\, dq^i + \frac{\partial F}{\partial t}\, dt\right)$$

dove la curva sulla quale si integra da A a B è arbitraria.

Per l'iconale S è quindi indipendente dal cammino l'espressione

$$S(B) = S(A) + \int_A^B \left(\frac{\partial S}{\partial q^i}\, dq^i + \frac{\partial S}{\partial t}\, dt\right)$$

Utilizzando le (4.7) e integrando sulla curva (1) si ha:

$$S(B) = S(A) + \int_{\mathscr{C}A}^{B} (p_i \frac{d\alpha^i}{dt} dt - hdt) =$$

$$= S(A) + \int_{\mathscr{C}A}^{B} (\frac{\partial \ell}{\partial q^i} \frac{d\alpha^i}{dt} - p_i \dot{\phi}^i + \ell)dt$$

e infine

$$S(B) = S(A) + \int_{\mathscr{C}A}^{B} [\ell + (\frac{d\alpha^i}{dt} - \dot{\phi}^i) \frac{\partial \ell}{\partial q^i}]dt$$

Questo integrale non dipende dalla curva C e viene detto integrale invariante di Hilbert.

E' usuale scriverla ponendo $\frac{d\alpha^i}{dt} = (q^i)'$ e $\dot{\phi}^i = \dot{q}^i$ e cioé indicando per ogni punto P, con un apice la derivata rispetto a t calcolata lungo la curva C, e con un punto sovrapposto la derivata rispetto a t, calcolata lungo l'estremale del campo scelto, passante per P. Si ha così:

$$S(B) = S(A) + \int_{\mathscr{C}A}^{B} [\ell + (q^{i'} - \dot{q}^i) \frac{\partial \ell}{\partial q^i}]dt \quad .$$

Se in particolare C è l'estremale del campo congiungente A e B, si ha $q^{i'} = \dot{q}^i$ e quindi

$$S(B) = S(A) + \int_{A}^{B} \ell \, d\, t$$

e si riottiene la definizione di S.

Le considerazioni precedenti si possono compendiare nella proposizione: Se si costruisce un campo di estremali trasverse rispetto ad una superficie Σ di equazioni $\int L \, d\, t = a$ e se u^i sono le loro pendenze, definite dalle equazioni

$$\frac{dq^i}{dt} = u^i \quad . \tag{6.4}$$

Allora l'integrale

$$\int_{\mathscr{C}A}^{B} [-(q'^i - u^i) \frac{\partial \ell}{\partial u^i}]dt \tag{6.5}$$

è indipendente dalla curva $\mathscr{C}$ che porta da A a B .

Le $q^{i'}$ ovviamente sono le derivate delle q^i lungo C.

Se viceversa, è dato un campo di vettori p_i, tale che l'integrale

$$(6.6) \qquad S = \int_B^A (p_i q'^i - h)dt$$

siaindipendente dalla curva che connette A e B, le funzioni p_i sono le quantità di campo di un campo di estremali e l'integrale fornisce la distanza geodetica, in questo campo, fra A e B.

Infatti se l'integrale non dipende dal cammino, tenendo fisso A si ha in B:

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i \ ; \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -h$$

e pertanto S, come funzione dell'estremo superiore dell'integrale (6) soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi.

Ma ogni soluzione di tale equazione è la distanza geodetica in un campo di estremali (n° 4) e quindi si ha la proposizione, inversa della precedente:

Se le funzioni u(t) rendono l'integrale (5) indipendente dal cammino, le equazioni (4) hanno come soluzioni un sistema di ∞^n estremali che soddisfano alla condizione di trasversalità rispetto alle superfici $S(qt) = \text{cost.}$

7. Il ruolo dell'equazione di H-J.

Nella trattazione precedente si è visto che il sussistere della equazione di H J è una condizione necessaria e sufficiente perché un campo di vettori covariante $(p_i, \ldots -h)$ nello spazio QT descriva un sistema meccanico di hamiltoniano h .

La necessarietà della condizione è stata data in varie forme e, in particolare, nell'ultimo teorema del n° precedente; la sufficienza della condizione è conseguenza immediata del fatto che il sistema caratteristico associato alla equazione di H J ha forma canonica.

E' ovvio, quindi, che un campo di vettori assegnato ad arbitrio nello spazio QT non descrive un sistema meccanico perché in generale non soddisfa all'equazione di H - J.

Tuttavia non è difficile riconoscere, almeno in termini qualitativi, che, sotto condizioni molto generali ad un campo di vettori nello spazio QT si può associare un sistema meccanico.

Sia data la varietà

$$F(q^1 \dots q^n \; q^{n+1} \; p_1 \dots p_n) = 0 \tag{7.1}$$

nello spazio R^{2n+1}. All'equazione (1) si può associare un'equazione a derivate parziali del primo ordine

$$F(q^1 \dots q^n \; u \; p_1 \dots p_n) \qquad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial q^i}\right) \tag{7.2}$$

e questa equazione, a sua volta, può essere ridotta (I n° 5) alla forma di H-J.

$$P_{n+1} + h(q^1 \dots q^{n+1} \; P_1 \dots P_n) = 0 \quad . \tag{7.3}$$

Ciò può essere espresso dicendo che ogni equazione a derivate parziali del primo ordine descrive un sistema meccanico. Anzi, se si può risolvere la (2) rispetto a più di una delle p, si ottengono altrettanti sistemi meccanici relativi alla stessa equazione (2). Naturalmente questi sistemi sono distinti fra loro per il diverso significato assunto di volta in volta dalle variabili: infatti se si risolve la (2) rispetto a p_k, sarà q^k ad avere il ruolo di tempo. Inoltre anche la funzione h nella (3) sarà di volta in volta differente. E' chiaro però che, una volta scelta la variabile che deve avere il ruolo di tempo, l'equazione (2) individua un unico sistema meccanico.

In conclusione si può dire che ogni volta che si assegna nello spazio QT un campo di vettori e una relazione (1) alla quale questo campo deve soddisfare, si ottiene un sistema meccanico.

Se si parte da un principio variazionale nello spazio QT,

$$\delta \int (p_i dq^i - h \, d \, t) = 0$$

assegnando il campo $(p_i - h)$ è ancora necessario aggiungere una relazione di tipo(1), la quale assicuri che sussista l'equazione di H - J.

I principi variazionali ai quali si è accennato nel n° 3 non hanno invece richiesto alcuna relazione di tipo (1). Negli spazi Q e PQ sono infatti state assegnate le funzioni $\ell(q\ \dot{q}\ t)$ e rispett. $h(q\ p\ t)$, le quali forniscono le limitazioni necessarie ad assicurare la validità dell'equazione di H-J.

In sostanza, quindi, per ottenere un sistema meccanico da un principio variazionale:occorre

1) o assegnare un lagrangiano
2) o assegnare un hamiltoniano
3) o assegnare un campo di vettori ed insieme una equazione di tipo (1) che equivalga alla equazione di H-J.

In quest'ultimo caso si segue una strada inversa di quella che si segue nei primi due casi: nei casi a) e b), infatti si parte dalle equazioni del moto e, in particolare dalle equazioni canoniche; nel secondo caso si perviene alle equazioni canoniche come passo finale, ricavandole come sistema caratteristico dell'equazione di H-J.

O o O o O o O o O