CAPITOLO V

Integrali primi del moto.

1. Caratterizzazione degli integrali primi di un sistema hamiltoniano.

Nel capitolo precedente si è visto che le equazioni canoniche possono essere scritte nella forma [IV (3.3)]

$$\dot{q}^i = (h,q^i) \qquad \dot{p}_i = (h,p_i) \quad . \tag{1.1}$$

Le derivate temporali sono calcolate lungo le soluzioni delle equazioni stesse.

In forma analoga si può scrivere la derivata temporale di una qualunque funzione $f(q\ p\ t)$. E' ovvio che per derivata temporale si intende la derivata $\frac{d}{dt} f[q(t),p(t)t]$ dove le $q^i(t)$, $p_i(t)$ costituiscono una generica soluzione delle (1). Lungo una soluzione si ha

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q^i}(h,q^i) + \frac{\partial f}{\partial p_i}(h,p) + \frac{\partial f}{\partial t} = (h,f) + \frac{\partial f}{\partial t} \ .$$

In particolare per $f \equiv h$ si ha:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad . \tag{1.2}$$

Una funzione costante lungo le soluzioni del sistema (1)(con valori della costante in generale diversi da soluzione a soluzione) viene detto un integrale primo del moto. In particolare, in base alla (2), h stessa, se non dipende esplicitamente da t, è un integrale primo del moto.

Per gli integrali primi del moto risulta

$$(h,f) + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

La (3) ha l'aspetto di una equazione a derivate parziali del primo ordine nella incognita f. La strada seguita per ottenerla fa pensare però a prima vista, che essa non sia una effettiva equazione differenziale. Infatti perché la (3) sia una equazione differenziale è necessario che le derivate di f annullino il primo membro quando siano calcolate in un punto qualunque del campo in cui è definito il moto e cioè, per valori di q p t liberamente scelti in tale campo. Invece la (3) è stata ottenuta, non in questo modo, ma derivando lungo una soluzione del sistema (1) e cioè derivando rispetto alle q^i, p_i riguardate non come variabili indipendenti, bensì come variabili vincolate dalle equazioni di una curva soluzione del sistema (1).

Va osservato però che in ogni punto del campo in cui è definito il moto, passa una (e una sola) curva soluzione del sistema (1) e quindi, comunque si scelga un punto in tale campo, le derivate parziali di f soddisfano, in quel punto, alla relazione (3). Un integrale primo soddisfa quindi necessariamente la (3) come equazione differenziale.

Viceversa, sia assegnata l'equazione a derivate parziali (3) nel campo in cui è definito il moto. Le derivate di una soluzione f, che certamente esiste (I n. 4), soddisfano la (2) in ogni punto di tale campo: in particolare lungo una soluzione del sistema (1) il primo membro delle (3), si riduce a $\frac{df}{dt}$ e quindi f è un integrale primo del sistema canonico (1).

Si può concludere

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione f sia un integrale primo di un sistema meccanico di hamiltoniano h, è che essa sia una soluzione della equazione a derivate parziali, del primo ordine lineare, omogenea

$$(1.4) \qquad (h,f) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Il sistema caratteristico associato alla (2) è, come si riconosce immediatamente, il sistema canonico (1).

La (3) è una equazione in $2n+1$ variabili e possiede $2n$ soluzioni indipendenti $f_1(q \cdot p\ t) \ldots . f_{2n}(q\ p\ t)$: ogni altra soluzione è funzione delle $f_1 \ldots f_{2n}$.

Un sistema canonico possiede quindi $2n$ integrali primi indipendenti.

In particolare se h non dipende esplicitamente da t, si possono trovare $2n-1$ suoi integrali primi indipendenti dal tempo come soluzioni della equazione in $2n$ variabili indipendenti.

$$(1.3') \qquad (h\ f\ ) = 0\ .$$

Si può osservare che nel caso in cui h non dipenda da t, un sistema di $2n$ soluzioni della (3) si può ottenere associando alle $2n-1$ soluzioni della (3') una qualunque soluzione della (3) stessa, per es. una funzione del tipo

$$f_{2n}(q\ p\ t) = \phi(qp)+t$$

dove $\phi(qp)$ è soluzione della equazione

$$(1.5) \qquad (h\ f) + 1 = 0$$

E' ovvio che la funzione f_{2n} così ottenuta è indipendente dalle $2n-1$ soluzioni della (3): la ϕ stessa è indipendente da queste soluzioni perché, in caso contrario sarebbe anch'essa soluzione della (3') e non potrebbe essere soluzione della (5).

Se i $2n$ integrali ottenuti sono ad un sol valore, dalle relazioni

$$f_1(q\ p\ t) = c_1 \ldots f_{2n}(\ q\ p\ t) = c_{2n}$$

in virtù della indipendenza delle f, che implica che

$$J = \left| \frac{\partial(f_1 \ldots f_{2n}}{\partial(q_1 \ldots q_n p_1 \ldots p_n)} \right| \neq 0$$

si possono esplicitare le variabili canoniche in funzione di t e delle

2n costanti c_i

$$q^i = \phi^i(t\, c_1 \dots c_{2n});\; p_i = \Psi_i(t\, c_1 \dots c_{2n})$$

e quindi la conoscenza di un sistema completo di integrali primi fornisce la soluzione del problema del moto.

Nel caso in cui h non dipenda da t, se si conosce un sistema completo di soluzioni a un sol valore delle (3'), delle relazioni

$$f_1(q\, p) = c_1 \dots f_{2n-1}(q\, p) = c_{2n-1}$$

si possono ricavare 2n-1 variabili canoniche in funzione di una di esse, per es.

$$\begin{cases} q^\alpha = \phi^\alpha(q^1 c_1 \dots c_{2n-1}) & (\alpha = 2 \dots n) \\ p_i = \Psi_i(q^1 c_1 \dots c_{2n}) & (i = 1 \dots n) \end{cases}$$

e si ottiene la traiettoria rappresentativa del moto nello spazio delle fasi. Resta però incognita la legge oraria.

Se l'hamiltoniano dipende esplicitamente dal tempo, si riconosce immediatamente che esso, assieme ad un sistema completo di suoi integrali primi, costituisce un sistema di 2n+1 funzioni indipendenti delle 2n+1 variabili q p t. Infatti se fosse $h = X(f_1 \dots f_{2n})$, lungo una traiettoria si avrebbe, utilizzando la (2)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial f_k} \frac{df_k}{dt} = 0$$

Poiché per ipotesi h è funzione esplicita di t, esso non è funzione dei suoi integrali primi.

Si associ ad h un sistema arbitrario di 2n funzioni $g_i \dots g_{2n}$ in modo da ottenere complessivamente 2n+1 funzioni indipendenti: in generale nessuna delle funzioni g è integrale primo di h, ma certamente ogni integrale primo di h è funzione di $h, g_1 \dots g_{2n}$. L'equazione (3) diventa:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(h,h) + \frac{\partial f}{\partial g_k}(h,g_k) + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial g_k}\frac{\partial g_k}{\partial t} = 0$$

cioé

$$\frac{\partial f}{\partial g_k}\left[(h\ g_k) + \frac{\partial g_k}{\partial t}\right] + \frac{\partial f}{\partial h}\ \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad .$$

Questa equazione è equivalente alla (2) ma la scelta delle g permette una maggiore flessibilità nei coefficienti. Naturalmente se le g_i sono integrali primi di h si ricade nella (3), perché risulta o, $\frac{\partial f}{\partial h} = 0$ o $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$.

In particolare, se h non dipende dal tempo, esistono, come si è visto, $2n-1$ integrali primi indipendenti dal tempo. Si può riconoscere che un sistema di $2n$ funzioni indipendenti si costruisce associando ai $2n-1$ integrali primi di h un integrale primo di un suo integrale primo.

Siano infatti

$$h = f_1 \ \dots \ f_{2n-1}$$

$2n-1$ soluzioni della

$$(h\ f) = 0$$

e si consideri l'equazione

$$(f_k\ f) = 0 \qquad\qquad (k \neq 1) \ .$$

Tale equazione ha certamente h fra le sue soluzioni.

D'altra parte il gruppo di funzioni $f_1 \dots f_{2n-1}$ può essere completato, con una funzione $\bar{f}$, in un gruppo di ordine $2n$ privo di funzioni singolari.

Scegliendo le funzioni $f_1 \dots f_{2n-1}\ \bar{f}$ in modo da ottenere una base canonica di tale gruppo, poiché h commuta con $f_1 \dots f_{2n-1}$, è necessariamente

$$(h\ \ \bar{f}) \neq 0$$

cioé $\bar{f}$ è la funzione coniugata [1] di h: $\bar{f}$ non è quindi coniugata da nessuno degli integrali primi di h(distinti da h) e si ha in particolare

$$(f_k, \bar{f}) = 0$$

cioé la funzione che completa il gruppo è integrale primo di f_k(k=2...2n-1,

2. Connessione col teorema di H-J .

Assegnati due hamiltoniani in 2n variabili canoniche e scelte due basi canoniche $\phi^i \psi_i$, $\Phi^i \Psi_i$ per i loro integrali primi, si ponga:

$$q^{i'} = \phi^i(q\ p\ t) = \Phi^i(Q\ P\ t) = Q^{i'}$$

$$p_i' = \psi_i(q\ p\ t) = \Psi(Q\ P\ t) = P_i' \qquad .$$

Le trasformazioni $q\ p\ t \rightarrow q'p't'$ e $Q\ P\ t \rightarrow Q'P't'$ sono canoniche perché le basi scelte per i gruppi degli integrali primi sono canoniche e quindi soddisfano alle relazioni di commutazione. Inoltre le TC $q'p' \rightarrow Q'P'$ è l'identità e perciò si può scegliere per la sua generatrice una forma nota. Si può osservare inoltre che la trasformazione $qp \rightarrow q'p'$ oltre ad essere canonica è proprio (stante il carattere di integrali primi delle ϕ^i, ψ_i) una trasformazione corrispondente al teorema di H-J, cioé una trasformazione canonica che fa passare dalle qp, ad un sistema di 2n costanti del moto. Ovviamente una osservazione identica si può fare per la trasformazione $QP \rightarrow Q'P'$. Si indichino allora con s e con S rispett. le generatrici delle trasformazioni $qp \rightarrow q'p'$ e $Q\ P \rightarrow Q'P'$. La trasformazione $q'p' \rightarrow Q'P'$ [che è l'identità e, nelle variabili canoniche $q'Q'$ ha generatrice

---

(1) In una base canonica si dicono coniugate le coppie di variabili la cui PP è diversa da zero.

nulla (IV n° 5)] ha generatrice che è somma (II n° 6) delle generatrici della TC: $q'p' \to q\,p$, cioé $-s$ della TC : $qp \to Q\,P$, sia essa W, e della TC: $QP \to Q'P'$ cioé S. Si ha così

$$0 = - s(qq't) + W(qQt) + S(QQ't)$$

ossia

$$W(qQt) = - S(QQ't) + s(qq't) \qquad (2.1)$$

In conclusione la generatrice della TC $\phi^i, \Psi_i \to \Phi^i\ \Psi_i$ è la differenza delle generatrici delle TC relative ai problemi di H-J dei due hamiltoniani h e H.

Naturalmente per calcolare $W(q\ Qt)$ occorre esplicitare $Q^1(qQt)$ e $q^1(qQt)$ negli argomenti delle funzioni S ed s(1).

Si può osservare che la (4) non è altro che la (7.9) del Cap. II la quale ha in questo modo una interpretazione diretta.

---

(1) Utilizzando una diversa generatrice per la TC identica $q'p' \to Q'P'$ si trova in ogni caso che la somma

$$- s(qq't) + W(qQt) + S(QQ't)$$

espressa in n variabili del gruppo $q'p'$, e in n variabili del gruppo $Q'P'$, è indipendente dal tempo.

3. Mutua riduzione di due hamiltoniani mediante TC.

Un calcolo diretto mostra che la PP di due integrali primi f_i , f_k di h è ancora un integrale primo di h.
Infatti risulta, utilizzando l'identità di Jacobi:

$$(h(f_i f_k)) + \frac{\partial}{\partial t}(f_i f_k) = ((h\ f_i)f_k) + (f_i(h\ f_k)) + \frac{\partial}{\partial t}\ ((f_1 f_2) = 0$$

La PP di due generici integrali primi è quindi funzione delle 2n soluzioni $f_1 \ldots f_{2n}$.(Spesso accade che la PP di due integrali primi $f_i \ldots f_k$ sia funzione delle sole funzioni f_i ed f_k e quindi non sia un nuovo integrale primo indipendente da questi). Poiché le PP di tutte le possibili coppie di integrali primi sono funzioni degli integrali primi stessi, si conclude che gli integrali primi di un sistema canonico, per ogni valore di t, costituiscono un gruppo di funzioni di ordine 2n: ogni sistema di 2n integrali indipendenti costituisce una base del gruppo.

Inoltre il gruppo che si ottiene per ogni fissato valore di t, essendo costituito da 2n funzioni indipendenti, è privo di funzioni singolari (IV n° 1). In conclusione: in un conveniente intervallo di valori di t, 2n integrali primi indipendenti di un sistema canonico individuano un gruppo (ad un parametro) di funzioni privo di funzioni singolari.

In base al risultato finale del n° 2 del Cap. III due gruppi di funzioni dello stesso ordine e con lo stesso numero di funzioni singolari possono sempre essere trasformati l'uno nell'altro mediante una TC.

Si assegni, allora, accanto ad h, un secondo hamiltoniano H(QPt) ancora in 2n variabili canoniche; poiché gli integrali primi di H, $F_1 \ldots F_{2n}$ costituiscono anch'essi, per ogni valore di t, un gruppo di funzioni di ordine 2n privo di funzioni singolari, esiste una TC T^* che trasforma il gruppo individuato dalla base f_i nel gruppo individuato dalla base F_i.

Questa trasformazione trasforma l'hamiltoniano h nell'hamiltoniano H secondo la solita relazione $H(QPt) = h(qpt) + \frac{\partial w}{\partial t}$ dove w è la generatrice della trasformazione T^*. Infatti si indichi con $H'(QPt) = h(qpt) + \frac{\partial w}{\partial t}$ la hamiltoniana in cui la trasformazione T trasforma h. Il gruppo degli integrali primi di H', come trasformato del gruppo f_i, sotto la trasformazione T^*, è ancora il gruppo F e quindi le $F_1 \dots F_{2n}$ costituiscono un sistema completo di integrali primi di H'. D'altra parte un sistema completo di integrali primi individua l'hamiltoniano a meno di una inessenziale funzione additiva del solo tempo. Infatti il sistema algebrico:

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q^k} \frac{\partial X}{\partial P_k} - \frac{\partial F_i}{\partial Q_k} \frac{\partial X}{\partial Q^k} = - \frac{\partial F_i}{\partial t} \qquad (i=1\dots 2n)$$

per l'indipendenza delle F_i, ha matrice

$$\left| \frac{\partial F}{\partial Q} - \frac{\partial F}{\partial P} \right|$$

non nulla e quindi individua univocamente le incognite $\frac{\partial X}{\partial Q^i} \; \frac{\partial X}{\partial P_i}$, e cioé individua X a meno di una funzione additiva indipendente dalle variabili canoniche.

Di conseguenza H e H' coincidono.

Se si scelgono basi canoniche $\phi_i \psi_i$,$\Phi_i \Psi_i$ per i due gruppi, una trasformazione canonica che porta h in H è (III n° 2)

$$\phi_i = \Phi_i \qquad \psi_i = \Psi_i \qquad . \tag{3.1}$$

In particolare siano t_1 e t_2 due istanti appartenenti all'intervallo temporale in cui si svolge il moto. In questo caso le funzioni di q e p: $\phi_i(qpt_1)$, $\Psi(qpt_1)$ costituiscono un gruppo e lo stesso accade per le funzioni di q p $\phi_i(qpt_2)$ $\Psi_i(qpt_2)$.Allora le uguaglianze

$$(3.2) \qquad \phi_i(qpt_1) = \phi_i(QPt_2);\ \Psi_i(qpt_1) = \Psi_i(QPt_2)$$

forniscono una TC: tali uguaglianze individuano una corrispondenza fra i punti di quel sottospazio dello spazio qpt, che costituisce lo spazio delle fasi all'istante t_1 e i punti di quel sottospazio (dello spazio qpt) che costituisce lo spazio delle fasi all'istante t_2.

Inoltre poiché le ϕ^i Ψ_i sono integrali primi del moto, le relazioni precedenti, scritte nella forma espressiva

$$\begin{cases} \phi_i(q(t_1)p(t_1)t_1) = \phi_i(q(t_2),p(t_2),t_2) = \text{cost} \\ \Psi_i(q(t_1)p(t_1)t_1) = \Psi_i(q(t_2)p(t_2)t_2) \quad = \text{cost} \end{cases}$$

mostrano che il punto $[q(t_1)p(t_1)]$ e il suo trasformato $[q(t_2)p(t_2)]$ stanno su una stessa traiettoria: per la (2.2) quindi, durante il moto le variabili canoniche relative a una generica coppia di istanti sono legate da una trasformazione canonica. Si ritrova così il risultato del Cap. IV n° 5: il moto appare come una famiglia ad un parametro di trasformazioni canoniche.

Se gli istanti t_1 e t_2 sono separati da un intervallo finito, la trattazione appropriata è quella variazionale (v. Cap. VI). Se invece si ha $t_2 = t_1 + dt$, si ricade nella trattazione fatta a proposito delle trasformazioni canoniche infinitesime: il confronto con la trattazione attuale è lasciato come esercizio.

Le trasformazioni canoniche che conducono dall'hamiltoniano h all'hamiltoniano H sono infinite. Per dimostrarlo si esegua una TC che faccia passare dalle funzioni $\Phi_i\Psi_i$ assunte come variabili indipendenti, a certe funzioni $\alpha_k(\Phi\ \Psi t)$, $\beta_k(\Phi,\Psi,t)$.

Poiché la trasformazione per ipotesi è canonica, si ha:

$$(\alpha_i,\alpha_k)_{\Phi\Psi} = (\beta_i\beta_k)_{\Phi\Psi} = 0;\ (\alpha_i\beta_k)_{\Phi\Psi} = \delta_i^k$$

Anche la trasformazione $QP \to \Phi\Psi$ risulta canonica perché le $\Phi(QPt)$ e le $\Psi(QPt)$ soddisfano le relazioni di commutazione. Dalla canonicità delle trasformazioni $QP \to \Phi\Psi$ e $\Phi\Psi \to \alpha\beta$ segue che la trasformazione $QP \to \bar{\alpha}\ \bar{\beta}$ (dove $\bar{\alpha}(QPt) = \alpha[\Phi(QPt),\Psi(QPt),t]$ e analoghe) è pur essa canonica; le funzioni $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ soddisfano quindi anch'esse le relazioni di commutazione.

Se ne conclude che esiste una TC, che fa passare dalle qp alle QP, individuata in forma implicita dalle relazioni

$$(3.3) \qquad \phi_i(qpt) = \bar{\alpha}_i(QPt); \quad \psi_i(qpt) = \bar{\beta}_i(QPt)$$

Tale trasformazione è diversa dalla (1) e può perciò essere conveniente indicare le variabili QP con nuovi simboli $\xi\ \eta$.

Esiste una TC che fa passare dalla QP alle $\xi\ \eta$; essa è individuata dalle relazioni:

$$(3.4) \qquad \Phi_i(QPt) = \bar{\alpha}_i(\xi\eta t); \quad \Psi_i(QPt) = \bar{\beta}_i(QPt) \quad .$$

Le funzioni $\alpha(\Phi\Psi t)$, $\beta(\Phi\Psi t)$ sono funzioni di integrali primi di H e quindi le funzioni $\bar{\alpha}(QPt)$ $\bar{\beta}(QPt)$ sono integrali primi di H. Di conseguenza la TC individuata dalla (3) trasforma anch'essa h in H. Ciò si può esprimere dicendo che le funzioni $H(QPt)$ e $H(\xi\eta t)$ ottenute mediante le TC (1) e (3) sono di forma funzionale identica o anche dicendo che la TC (4) lascia invariata la forma di H.

Poiché le funzioni $\alpha(\Phi\Psi t)$ e $\beta(\Phi\Psi t)$ possono essere scelte in infiniti modi, si riconosce che le TC che fanno passare da h ad H sono infinite. Si può anche dire che esistono infinite TC che fanno passare da h ad hamiltoniani che hanno la forma funzionale di H.

Si torni ora alla TC (4) che lascia invariata la forma funzionale di H: essa è individuata da due $2n^{uple}$ di integrali primi di H stesso. Tutte le TC individuate da sistemi completi di integrali primi di H lasciano quindi H invariata in forma. Il risultato può essere invertito: se una TC lascia invariata la forma di H, essa *può essere sempre ottenuta mediante due sistemi completi di integrali* primi di H. Infatti (v. il successivo n° 4) una TC trasforma gli integrali primi di un hamiltoniano negli integrali primi *dell'hamiltoniano* trasformato e quindi la TC può essere individuata proprio dal sistema di integrali primi scelto e dal suo trasformato.

Il risultato, nel caso di hamiltoniano invariante in forma, segue immediatamente.

Si ha quindi che
condizione necessaria e sufficiente perché una TC lasci invariata la forma funzionale dell'hamiltoniano è che essa sia individuata da due sistemi completi di integrali primi dell' hamiltoniano stesso, nel senso della (4).

4. Equazioni degli integrali primi e TC.

Siano assegnati, al solito, gli hamiltoniani h ed H e due sistemi completi di integrali primi f_i, F_i.

La trasformazione

$$f_i(qpt) = F_i(QPt) \tag{4.1}$$

è una trasformazione canonica soltato per particolari scelte delle due $2n^{uple}$ di funzioni. Essa ha però la proprietà di trasformare h in H, come si riconosce ricordando che(n.3),che da un sistema completo di integrali primi si risale ad un'unica funzione hamiltoniana (a meno di una inessenziale funzione additiva indipendente dalle variabili canoniche): ai due sistemi completi f_i ed F_i corrispondono quindi h e H rispett. Da ciò segue pure che la (1) lascia invariata la forma canonica delle equazioni del moto.

Allo stesso risultato si perviene osservando che la (1) trasforma l'equazione

$$(h,f) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{4.2}$$

che ammette il sistema completo di soluzioni f_i, nella equazione

$$(4.3) \qquad (H,F) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

che ammette il sistema completo di soluzioni F.

Infatti dalle (1) si ha

$$\frac{\partial f_i}{\partial q^r} = \frac{\partial F_i}{\partial Q^s} \frac{\partial Q^s}{\partial q^r} + \frac{\partial F_i}{\partial P_s} \frac{\partial P_s}{\partial q^r}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_r} = \frac{\partial F_i}{\partial Q^s} \frac{\partial Q^s}{\partial p_r} + \frac{\partial F_i}{\partial P_s} \frac{\partial P_s}{\partial p_r}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial F_i}{\partial Q^s} \frac{\partial Q^s}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial P_s} \frac{\partial P_s}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial t}$$

Sostituendo nella (2) si ha:

$$(4.4) \qquad \frac{\partial F_i}{\partial Q^s}\left(\frac{\partial h}{\partial p_r} \frac{\partial Q^s}{\partial q^r} - \frac{\partial h}{\partial q^r} \frac{\partial Q^s}{\partial p_r} + \frac{\partial Q_s}{\partial t}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial P_s}\left(\frac{\partial h}{\partial p_r} \frac{\partial P_s}{\partial q^r} - \frac{\partial h}{\partial q^r} \frac{\partial P_s}{\partial p_r} + \frac{\partial P_s}{\partial t}\right) + \frac{\partial F_i}{\partial t} = 0$$

Questa equazione coincide con la (3) perché risulta

$$\frac{\partial h}{\partial p_r} \frac{\partial Q^s}{\partial q^r} - \frac{\partial h}{\partial q^r} \frac{\partial Q^s}{\partial p_r} + \frac{\partial Q^s}{\partial t} = (h,Q^s)_{qp} + \frac{\partial Q^s}{\partial t} = \dot{Q}^s = \frac{\partial H}{\partial P_s}$$

e analogamente

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p_r} \frac{\partial P_s}{\partial q^r} - \frac{\partial h}{\partial q^r} \frac{\partial P_s}{\partial p_r} + \frac{\partial P_s}{\partial t}\right) = \dot{P}_s = - \frac{\partial H}{\partial Q^s} .$$

Le Q^s, P_s sono calcolate mediante la loro dipendenza dalle q,p,t .

Se la trasformazione (1) non è canonica non risulta [si pone, al solito $\bar{h}(QPt) = h(qpt)$]

$$(h\ P_s)_{qp} = (h\ P_s)_{QP} = -\frac{\partial \bar{h}}{\partial Q^s}$$

$$(h\ Q^s)_{qp} = (\bar{h}\ Q^s)_{QP} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial P_s}$$

ma risulta sempre

$$(h\ Q^s) + \frac{\partial Q^s}{\partial t} = \dot{Q}^s$$

e analoghe (1).

Nel caso particolare in cui la (1) sia canonica, utilizzando le (3.18) e la (3.24) del cap. III si ha:

$$\frac{\partial Q^s}{\partial t} = -\left(\frac{\partial w}{\partial t}, Q^s\right) \ ; \quad \frac{\partial P_s}{\partial t} = -\left(\frac{\partial w}{\partial t}, P_s\right)$$

e quindi la (4) si riduce immediatamente alla (3).

Poiché la (1) trasforma la (2) nella (3), essa trasforma pure il sistema caratteristico della (2) nel sistema caratteristico della (3). In altri termini la (1) trasforma il sistema canonico relativo ad h nel

---

(1) D'altra parte se $2n$ funzioni indipendenti g_k, di $2n+1$ variabili x^i soddisfano due equazione del tipo (2)

$$\sum_{i=1}^{2n+1} a_i \frac{\partial g_k}{\partial x^i} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{2n+1} b_i \frac{\partial g_k}{\partial x^i} = 0 \qquad (k = 1 \ldots 2n)$$

i due sistemi algebrici nelle incognite a_i e rispett. b_i, e aventi la matrice $\left\|\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right\|$ di rango $2n$ hanno le soluzioni proporzionali ai minori di detta matrice e quindi le a_i e le b_i sono proporzionali: $a_i = k\ b_i$. Ne segue che i sistemi (3) e (4) sono equivalenti, indipendentemente dalla dimostrazione fatta dopo la formula (4).

nel sistema canonico relativo ad H.

A questo punto si può dare una dimostrazione nuova e più rapida della proposizione dimostrata nel cap. III n° 3; ad ogni gruppo di funzioni di ordine $2n$ privo di funzioni singolari, è associato un hamiltoniano h i cui sistemi completi di integrali primi coincidono con le basi del gruppo stesso.

Infatti, sia $\phi^i \Psi_i$ una base canonica del gruppo. Scelto un hamiltoniano $H(QPt)$ in $2n$ variabili canoniche, si consideri una base canonica Φ^i, Ψ_i del gruppo dei suoi integrali primi. La TC

$$\phi^i = \Phi^i ; \; \psi_i = \Psi^i$$

fa corrispondere (secondo la relazione $H = h + \frac{\partial w}{\partial t}$) H ad un certo hamiltoniano $h(qpt)$ per il quale le ϕ^i, Ψ_i costituiscono un sistema completo di integrali primi.

Come corollario si ha che se le f_i sono una base di un gruppo di ordine $2n$, privo di funzioni singolari, il sistema di equazioni

$$a_r(qpt) \frac{\partial f_i}{\partial q^r} + b_r(qpt) \frac{\partial f_i}{\partial p_r} + \frac{\partial f_i}{t} = 0 \qquad (i=1...2n)$$

ha sempre soluzioni a_i, b_i che sono le derivate parziali di un'unica funzione $h(qpt)$

$$a_r = \frac{\partial h}{\partial p_r} \; ; \; b_r = - \frac{\partial h}{\partial q^r}$$