$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_3}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

dove si è sviluppato J secondo gli elementi della 3ª riga, e si è tenuto conto che i minori di $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ $\frac{\partial f_2}{\partial z}$ sono nulli per la 2ª e 3ª delle (6.2).

RIcavando poi dalle stesse equazioni $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ e sostituendo nello sviluppo di J, si ottiene

$$J = 0$$

Ciò vuol dire che f^1, f^2, f^3 sono dipendenti, e quindi non è possibile trovare una base canonica nel gruppo generato da ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3.

Si deduce che in generale, in un gruppo generalizzato di funzioni di rango massimo, non esiste una base che verifichi le condizioni (6.1).

§ 7. Conclusioni.

L'assegnare una matrice quadrata $(\eta^{\alpha\beta}(\omega_1,\dots,\omega_n))$, singolare, antisimmetrica e di ordine n ed s funzioni $F_i(\omega_1,\dots,\omega_n)$, con $s \leq n$, permette di costruire un gruppo generalizzato singolare di funzioni.

In tale gruppo, supposto non commutativo, si definiscono, al modo usuale, le funzioni singolari, che ne costituiscono un sottogruppo al quale appartengono tutte le eventuali funzioni neutre del gruppo, l'esistenza delle quali è dovuta al fatto che la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ assegnata è singolare.

Di un gruppo generalizzato singolare di funzioni si determina il gruppo reciproco, a cui appartengono tutte le funzioni neutre rispetto ad $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$; viene così a mancare, per i gruppi generalizzati singolari di funzioni la proprietà dei gruppi ordinari secondo la quale ogni gruppo di funzioni è il gruppo reciproco del proprio reciproco; questa proprietà continua a valere solo per i gruppi generalizzati singolari di funzioni che già in partenza contengono tutte le funzioni neutre.

Ogni gruppo generalizzato singolare di funzioni si può sempre estendere ad un gruppo di rango n, cioé di rango massimo, ma in generale in un gruppo generalizzato singolare di funzioni di rango massimo non è possibile determinare una base canonica, nel senso del §6, rispetto alla matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ assegnata.