$$s < r - a_1 \qquad \text{strettamente}$$

si avrebbe:

$$n = (r-a_1) + n - s > (r-a_1) + [n - (r-a_1)]$$

cioé $n > n$, il che è assurdo.

Osserviamo ancora che, valendo l'identità di Jacobi, ogni funzione

$$f(\omega) = (f_i, f_j)^*(\omega) \qquad (i,j = 1 \dots n - s)$$

è soluzione di (3.2); vale quindi il seguente

Teorema I. Dato un gruppo generalizzato di funzioni G_r, con l'operazione P.P.G. definita da una matrice $(\eta^{\mu\nu}(\omega))$ singolare, resta determinato un altro gruppo generalizzato di funzioni R_{n-s}, di rango $n - s = n-(r-a_1)$ munito della operazione P.P.G. definita dalla stessa matrice $(\eta^{\mu\nu}(\omega))$, e costituito da tutte le $f(\omega)$ che hanno P.P.G. nulla con ogni $F(\omega) \in G_r$.

R_{n-s}, in accordo con la nomenclatura del caso ordinario, lo diciamo gruppo reciproco di G_r e ad esso appartengono tutte le funzioni neutre.

Nel caso che $p = r - a_1$, R_{n-s} consta delle sole a_1 funzioni neutre.

§ 4. Funzioni singolari di un gruppo

Si considerino le funzioni di G_r che sono in involuzione con ogni funzione del gruppo, cioé che hanno P.P.G. nulla con ogni funzione di esso; tali funzioni sono dette singolari, ed è chiaro che esse appartengono anche al reciproco di G_r, cioé ad R_{n-s}.

In virtù della (1.4) le funzioni singolari di un gruppo G_r ne costituiscono un sottogruppo S, e si ha (cfr. [2] pag. 283):

Teorema II. Il sottogruppo S delle funzioni singolari di un gruppo G_r è anche un sottogruppo del reciproco R_{n-s}.

Risulta evidente, in questo caso, che ad S appartengono le a_1 funzioni neutre di G_r.

Se tutte le funzioni di un gruppo sono singolari, il gruppo si dice commutativo (cfr. [2] pag. 283).

Supponaimo ora di avere un gruppo G_r non commutativo, vogliamo determinare il numero di funzioni singolari indipendenti che esso possiede; tale numero (cfr. [2]pag. 283), è il numero di soluzioni indipendenti del sistema

$$(4.1) \qquad (F_\alpha, \Phi)^* = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots r);$$

Come osservato nel § 3, a_1 delle r equazioni del sistema (4.1) sono delle identità, e quindi il sistema si scrive, permutando opportunamente le funzioni F_α :

$$(4.2) \qquad \eta^{\mu\nu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\nu} \frac{\partial F_\beta}{\partial \omega^\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial F_\beta} = 0 \qquad \alpha = 1 \ldots r-a_1$$

Il numero di soluzioni di questo sistema, che è completo in virtù dell'identità di Jacobi, dipende dal rango della matrice

$$(\phi^*_{\alpha\beta}) = (\eta^{\mu\nu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial F_\beta}{\partial \omega^\nu})$$

che è senza dubbio $\leq r - a_1$.

Vale quindi il seguente

Teorema III. Se il rango di $(\phi^*_{\alpha\beta})$ è $(r-a_1)-a$, il gruppo non commutativo G_r possiede a funzioni singolari non neutre, che ne determinano un sottogruppo di rango a.

§ 5. Estensione del gruppo.

E' noto (cfr. [2] pag. 286) dalla teoria dei gruppi di funzioni ordinari di ogni gruppo G_r non commutativo si può estendere ad un gruppo di rango equale al numero di variabili indipendenti e tale proprietà si conserva anche per i gruppi generalizzati con P.P.G. definita da una matrice

$(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ ([3]) .

Nella letteratura però è trattato solo in caso in cui il numero di variabili indipendenti sia pari, e la matrice $(\eta^{\alpha\beta})$ è non singolare; in questo § si farà vedere che l'estensione di un gruppo generalizzato singolare di rango r si può ottenere indipendentemente dal fatto che n sia pari o dispari.

Consideriamo dunque il gruppo G_r definito come nei numeri precedenti, in esso è possibile (cfr. [2] pag. 285) determinare una base

$$\phi^1,\ldots,\phi^{t+q},\ \psi_1,\ldots,\psi_t \qquad (2t+q = r)$$

tale che

$$(5.1) \qquad (\phi^\mu\ ,\ \phi^\lambda)^* = 0\ ,\ (\psi_i,\psi_k)^* = 0\ ,\ (\phi^\mu,\psi_k) = \delta^\mu_k$$

con

$$\mu,\lambda = 1,\ldots,\ t+q$$
$$i,k = 1,\ldots t$$