Teorema : Considerato l'insieme delle funzioni di n variabili $\overset{1}{\omega},\dots,\overset{n}{\omega}$, e definita la P.P.G. mediante una matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ singolare e di rango $n-k$, esistono k funzioni, dette neutre, aventi P.P.G. nulla con ogni funzione delle ω[1].

Come conseguenza immediata del Teorema precedente, si ha che se n è dispari esiste almeno una funzione neutra.
Inoltre bisogna fare la seguente precisazione.

Se le funzioni di partenza $F_1,\dots,F_s$ sono tutte funzioni neutre, non è possibile costruire, col procedimento indicato al § 1, alcun gruppo generalizzato di funzioni, ad eccezione del gruppo banale composto dalle $F_1,\dots,F_s$ neutre e dalla funzione identicamente nulla. Pertanto, affinché quanto sarà detto in seguito non si riduca a questo caso, si supporrà che le s funzioni di partenza non siano tutte neutre rispetto alla matrice assegnata.
In altri termini, indicato con a_1 il numero di funzioni neutre indipendenti del gruppo G_r di funzioni costruito a partire da $F_1,\dots,F_s$, supporremo che sia:

$$r - a_1 \geq 2.$$

§ 3. Gruppo reciproco.

Si consideri ora il sistema differenziale:

$$(F_\alpha, f)^* = 0 \qquad (\alpha = 1\dots r); \tag{3.1}$$

per la proprietà (1.3) le soluzioni di tale sistema sono tutte le funzioni delle ω aventi P.P.G. nulla con ogni funzione di G_r. Esplicitando si ha:

([1]) Si osservi che se n è pari e la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ è non singolare, il sistema (2.2) ha solo soluzioni banali e quindi si ricade nel caso dei gruppi generalizzati non singolari ([3]).

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial f}{\partial \omega^\nu} = 0 \qquad (\alpha = 1 \ldots r) . \tag{3.2}$$

Ora, avendo indicato con a_1 il numero di funzioni neutre indipendenti di G_r, si ha che a_1 delle r equazioni del sistema (3.2) sono delle identità, e quindi il sistema stesso è costituito in realtà da $r - a_1$ equazioni; inoltre esso è completo in virtù dell'identità (1.4), ed il numero di soluzioni indipendenti che esso possiede dipende dal rango della matrice:

$$\left(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\mu}\right) \tag{3.3}$$

la quale è il prodotto delle matrici:

$$(\eta^{\mu\nu}) \quad \text{di rango} \quad n - k = p$$

e

$$\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\nu}\right) \text{ di rango } \quad r - a_1$$

e quindi, per il teorema di Binet, ha rango $s \leq \min(p, r - a_1)$.

Ora, poiché p è il numero massimo di funzioni indipendenti non neutre che un gruppo generico di rango $\leq n$ può avere, risulta $p \geq r - a_1$, e quindi

$$s \leq r - a_1 \tag{3.4}$$

Quindi il sistema (3.2) ammette $n-s$ soluzioni indipendenti $f_1, \ldots, f_{n-s}$, e fra esse sono comprese le k funzioni neutre.

Dimostriamo ora che nella (3.4) vale solo il segno di eguaglianza. Infatti, se fosse :

$$s < r - a_1 \qquad \text{strettamente}$$

si avrebbe:

$$n = (r-a_1) + n - s > (r-a_1) + [n - (r-a_1)]$$

cioé $n > n$, il che è assurdo.

Osserviamo ancora che, valendo l'identità di Jacobi, ogni funzione

$$f(\omega) = (f_i, f_j)^*(\omega) \qquad (i,j = 1 \ldots n - s)$$

è soluzione di (3.2); vale quindi il seguente

Teorema I. Dato un gruppo generalizzato di funzioni G_r, con l'operazione P.P.G. definita da una matrice $(\eta^{\mu\nu}(\omega))$ singolare, resta determinato un altro gruppo generalizzato di funzioni R_{n-s}, di rango $n - s = n-(r-a_1)$ munito della operazione P.P.G. definita dalla stessa matrice $(\eta^{\mu\nu}(\omega))$, e costituito da tutte le $f(\omega)$ che hanno P.P.G. nulla con ogni $F(\omega) \in G_r$.

R_{n-s}, in accordo con la nomenclatura del caso ordinario, lo diciamo gruppo reciproco di G_r e ad esso appartengono tutte le funzioni neutre.

Nel caso che $p = r - a_1$, R_{n-s} consta delle sole a_1 funzioni neutre.

§ 4. Funzioni singolari di un gruppo

Si considerino le funzioni di G_r che sono in involuzione con ogni funzione del gruppo, cioé che hanno P.P.G. nulla con ogni funzione di esso; tali funzioni sono dette singolari, ed è chiaro che esse appartengono anche al reciproco di G_r, cioé ad R_{n-s}.