§ 1. Definizioni preliminari .

Siano $F_1, F_2, \dots, F_s$, s funzioni indipendenti, di n variabili indipendenti $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n$ e si supponga che per $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n)$ variabile in un certo dominio di R^n, le F_i verifichino condizioni di regolarità abbastanza ampie, sì da garantire dal punto di vista analitico, la validità delle argomentazioni che si tratteranno.

Sia inoltre $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ una matrice funzionale di ordine n, antisimmetrica, e i cui elementi $\eta^{\alpha\beta}(\omega)$, oltre a verificare le ipotesi di regolarità già assunte per le F_i, verifichino anche le proprietà:

$$(1.1) \qquad \eta^{\lambda\mu} \frac{\partial \eta^{\nu\rho}}{\partial \omega^\mu} + \eta^{\nu\mu} \frac{\partial \eta^{\rho\lambda}}{\partial \omega^\mu} + \eta^{\rho\mu} \frac{\partial \eta^{\lambda\nu}}{\partial \omega^\mu} = 0$$

Considerate ora due qualsiasi funzioni fra le F_i, siano F_α, F_β, si definisce loro Parentesi di Poisson Generalizzata (P.P.G.) (cfr. [4], pag. 413), la funzione:

$$(1.2) \qquad (F_\alpha, F_\beta)^*(\omega) = \eta^{\mu\nu}(\omega) \frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\mu} \frac{\partial F_\beta}{\partial \omega^\nu}$$

Facendo uso di questa definizione, a partire dalle s funzioni $F_1, \dots F_s$, si determinano, come nel caso della P.P. ordinaria, (cfr. [2] pag. 282), r funzioni indipendenti $F_1, \dots, F_r$ $(s \leq r \leq n)$ tali che tutte le $\frac{r(r-1)}{2}$ P.P.G. che si possono formare con esse sono funzioni di esse stesse.

Le $F_1, F_2, \dots, F_r$ e tutte le funzioni che dipendono dalle ω per il tramite di esse costituiscono un gruppo generalizzato di funzioni, che indichiamo con G_r, e di cui le $F_1, \dots, F_r$ costituiscono una base; r è detto il rango del gruppo.

Si osservi che, se g_1 e g_2 sono funzioni appartenenti a G_r, si ha

$$(1.3)\qquad (g_1,g_2)^* = \eta^{\mu\nu}\frac{\partial g_1}{\partial F_\alpha}\frac{\partial F_\alpha}{\partial \omega^\mu}\frac{\partial g_2}{\partial F_\beta}\frac{\partial F_\beta}{\partial \omega^\nu} = \frac{\partial g_1}{\partial F_\alpha}\frac{\partial g_2}{\partial F_\beta}(F_\alpha,F_\beta)^*$$

come per i gruppi ordinari (cfr. [2], pag. 282).

Inoltre, se f,g,h sono tre funzioni di G_r, in virtù di (1.1) vale l'identità di Jacobi:

$$(1.4)\qquad ((f,g)^*,h)^* + ((g,h)^*,f)^* + ((h,f)^*,g)^* = 0$$

§ 2. Caso in cui $(\eta^{\alpha\beta}(\omega)$ è singolare. Funzioni neutre.

Supponiamo che la matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ sia singolare, di rango eguale ad $(n-k)$.

Le funzioni $f(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ che hanno P.P.G. nulla con ogni funzione di $\omega_1,\ldots,\omega_n$ si dicono neutre, ed è chiaro che ogni funzione che dipenda da $\omega_1,\ldots,\omega_n$ per il tramite di funzioni neutre è ancora una funzione neutra. Il numero di funzioni neutre indipendenti rispetto alla matrice data è k, come si vede dall'equazione

$$(2.1)\qquad (\Phi,f)^* = 0$$

nell'incognita f, facendo coincidere $\Phi(\omega)$ successivamente con $\omega_1,\ldots,\omega_n$, e si ha (cfr. [1]):