C A P I T O L O I

DISTANZE INVARIANTI E METRICHE DIFFERENZIALI INVARIANTI.

§ 1.1. IL GRUPPO DEGLI AUTOMORFISMI OLOMORFI DEL DISCO.

Sia Δ il disco aperto unitario di $\mathbb{C}$, $\Delta = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < 1\}$, e $\mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$ l'insieme delle applicazioni olomorfe di Δ in sé.

LEMMA DI SCHWARZ - *Sia $f \in Hol(\Delta,\Delta)$ con $f(0) = 0$, allora:*

1) $|f(\xi)| \leq |\xi|$ per ogni $\xi \in \Delta$, se vale il segno di uguaglianza per uno $\xi_0 \in \Delta \setminus \{0\}$ f è una rotazione, cioè esiste un $\theta \in R$ tale che $f(\xi) = e^{i\theta}\xi$ per ogni $\xi \in \Delta$

2) $|f'(0)| \leq 1$, se vale il segno di uguaglianza f è una rotazione.

Dimostrazione - La funzione $g : \xi \to \dfrac{f(\xi)}{\xi}$ è olomorfa in Δ. Per $0 < r < 1$ e $|\xi| = r$, è $|g(\xi)| \leq \dfrac{1}{r}$. Per il principio del massimo risulta allora

$$|g(\xi)| \leq \frac{1}{r} \qquad \text{per ogni } |\xi| \leq r .$$

Facendo tendere r a 1 si ottiene

$$|g(\xi)| \leq 1 \qquad \text{per ogni } \xi \in \Delta, \tag{1.1.1}$$

la prima parte di 1).

Se $|f(\xi_0)| = |\xi_0|$, la funzione $|g|$ raggiunge il suo massimo, 1, in Δ, e quindi esiste un $\theta \in R$ tale che $f(\xi) = e^{i\theta}\xi$ per ogni $\xi \in \Delta$.

Poiché $g(0) = f'(0)$, 2) segue dalla (1.1.1) e dal principio del massimo.

C.V.D.

Sia Aut(Δ) il gruppo degli automorfismi olomorfi di Δ cioé

$$\mathrm{Aut}(\Delta) = \{f : \Delta \to \Delta \quad \text{biolomorfe}\} .$$

Il lemma di Schwarz permette di determinare il gruppo Aut(Δ). Per $\xi_0 \in \Delta$ e $\theta \in \mathbf{R}$, la funzione

$$h : \xi \longrightarrow e^{i\theta} \frac{\xi - \xi_0}{1 - \bar{\xi}_0 \xi}$$

è olomorfa su Δ. Poiché

$$1 - |h(\xi)|^2 = \frac{(1-|\xi_0|^2)(1 - |\xi|^2)}{|1 - \bar{\xi}_0\xi|^2} > 0 \qquad \text{per } \xi \in \Delta ,$$

$h(\Delta) \subset \Delta$. Le funzioni h si chiamano trasformazioni di Moebius.

Sia G l'insieme delle trasformazioni di Moebius. Poiché $h(0) = - e^{i\theta}\xi_0$, G opera transitivamente su Δ .

Inoltre, posto

$$K(\xi) = e^{-i\theta} \frac{\xi + e^{i\theta}\xi_0}{1 + e^{i\theta}\xi_0\xi}$$

risulta $h \circ k = k \circ h = \mathrm{id}$. Dunque le trasformazioni di Moebius sono automorfismi olomorfi e l'inversa di una trasformazione di Moebius è ancora di Moebius.

Se $f \in \mathrm{Aut}\,\Delta$ è tale che $f(0) = 0$, dal lemma di Schwarz segue che esiste $\theta \in R$ tale che

$$f(\xi) = e^{i\theta}\xi \quad (\xi \in \Delta) .$$

Dato $g \in \mathrm{Aut}\,\Delta$, esiste una $h \in G$, tale che $h(0) = g(0)$; pertanto $h^{-1} \circ g\,(0) = 0$, e quindi $h^{-1} \circ g\,(\xi) = e^{i\theta}\xi$ per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}$ ed ogni $\xi \in \Delta$. Ne segue che $g = h\, e^{i\theta}$ ed in conclusione risulta $\mathrm{Aut}(\Delta) = G$.

<u>OSSERVAZIONE 1</u>. Come abbiamo già notato, il gruppo G opera transitivamente su Δ, e quindi Δ è omogeneo rispetto a G.

Esaminiamo il gruppo $\mathrm{Aut}(\Delta)$ da un altro punto di vista.
Consideriamo il gruppo

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{C},\ {}^t\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\},$$

e definiamo un omomorfismo surgettivo

$$\Phi : SU(1,1) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta) \qquad \text{associando a}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ l'applicazione $g : \xi \longmapsto \dfrac{a\,\xi + b}{\bar{b}\,\xi + \bar{a}}$.

Per rendersi conto che per $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ la $g : \xi \longmapsto \dfrac{a\,\xi + b}{\bar{b}\,\xi + \bar{a}}$ è un elemento di $\mathrm{Aut}(\Delta)$, basta osservare che, essendo $a \neq 0$, essa può scriversi nella forma

$$g(\xi) = \frac{a}{\bar{a}} \cdot \frac{\xi + \frac{b}{a}}{1 + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\,\xi}$$

e che $1 - \left| \frac{b}{a} \right|^2 = \frac{1}{|a|^2} > 0$.

Viceversa, data la trasformazione di Moebius

$$\xi \longmapsto e^{i\theta} \frac{\xi - \xi_o}{1 - \bar{\xi}_o \xi} \quad \text{con} \quad \xi_o \in \Delta \quad e \quad \theta \in \mathbb{R}$$

scegliendo a tale che $1 - |\xi_o|^2 = \frac{1}{|a|^2}$ e $\frac{a}{\bar{a}} = e^{i\theta}$, e $b = -\xi_o a$,

risulta

$$e^{i\theta} \frac{\xi - \xi_o}{1 - \bar{\xi}_o \xi} \equiv \frac{a\xi + b}{\bar{b}\xi + \bar{a}} \quad .$$

Dunque $\Phi(SU(1,1)) = \mathrm{Aut}(\Delta)$. In fine si verifica facilmente che Φ è un omomorfismo di gruppi e che $\mathrm{Ker}\,\Phi = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} =$ centro di $SU(1.1)$.

§ 1.2. METRICA DI POINCARÉ NEL DISCO.

Proviamo intanto il

LEMMA DI SCHWARZ-PICK. *Per ogni* $f \in \mathrm{Hol}(\Delta,\Delta)$, *risulta*

$$1) \qquad \left| \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{1 - \overline{f(\xi_1)}\, f(\xi_2)} \right| \leq \left| \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 - \bar{\xi}_1 \xi_2} \right| \quad \textit{per tutti gli } \xi_1, \xi_2 \in \Delta$$