§ 7. TORI INVARIANTI E MOTI CONDIZIONALMENTE PERIODICI.

Nella sua famosa e premiata (dal re di Svezia) memoria sul problema dei tre corpi, in cui dimostrava il teorema di inesistenza degli integrali primi di cui abbiamo appena parlato, Poincaré asseriva che questo avrebbe implicato l'inesistenza di soluzioni condizionalmente periodiche, esprimibili in serie della forma:

$$z(t) = \sum_{k_1 k_2} A_{k_1 k_2}(L,G)\, e^{i(k_1 \ell + k_2 z)}$$

anche in assenza di termini secolari dovuti a "risonanze esatte" $k_1 n - k_2 = 0$.

Weierstrass però non rimase convinto, e scrisse in una lettera il caustico commento: "Questa osservazione, che è di fondamentale significanza, viene data senza dimostrazione" . In effetti il teorema di Poincaré sugli integrali primi esclude che il problema dei 3 corpi possa essere completamente integrabile nel senso del teorema di Liouville-Arnold, cioè che un intero aperto possa essere riempito di tori invarianti $T(A,B)$, definiti da $H = A$, $I = B$ (un altro integrale) su cui il moto risulterebbe quasi periodico o periodico a seconda del numero di rotazione.

Perciò alcuni dei tori invarianti presenti nel problema dei 3 corpi ristretto per $\mu = 0$ sono "distrutti dalla perturbazione" per $\mu > 0$. Questo non significa affatto che alcuni altri tori invarian-

(*ordine di risonanza* > 4), allora *in un intorno piccolo a piacere di* $\xi = \eta = 0$ *l'applicazione* Θ_μ *possiede* (*per* μ *abbastanza piccolo*) *infinite curve invarianti* (45) (46) . Perciò l'orbita periodica α di 1^a specie ottenuta dal punto unito di Θ_μ è circondata da tori invarianti arbitrariamente vicini, che sulla superficie di livello di H_o in cui si svolge il moto *separano un sistema fondamentale di intorni di* α *dall'esterno rendendoli invarianti per il flusso integrale*: ogni condizione iniziale assegnata vicino ad α dà perciò luogo ad una soluzione per sempre ($t \in \mathbb{R}$) imprigionata tra due tori invarianti. (*Stabilità per* $t \longrightarrow \pm \infty$). La situazione estremamente complicata che si produce nell'intorno di una di queste orbite periodiche risonanti di 1^a specie è descritta dalla figura (da Arnold) nella quale possiamo notare che delle orbite periodiche di 2^a specie alcune sono stabili e circondate a loro volta da tori invarianti, altre instabili e accompagnate da varietà invarianti che si intersecano tra loro dando luogo ad un intrico di intersezioni (*punti eteroclinici ed omoclinici*).

Gran parte della teoria moderna dei sistemi dinamici strutturalmente stabili nasce dallo studio di queste varietà invarianti, ma questo discorso ci porterebbe fuori tema.

Bibliografia:

A.N. Kolmogorov, "*The general theory of dynamical systems and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*" Address to 1954 International Congress of Mathematicians ; ristampato in Abraham, R. - Marsden J. ," *Foundations of mechanics*" Benjamin 1967

./.

Bibliografia:

./. V. Arnold, "*Small denominators and problems of stabilityof motion in classical and celestial mechanics*" Russian Mathematical Surveys 1963 .

J. Moser, "*Stable and random motions in Dynamical Systems*" Princeton University Press 1973 .

C.L. Siegel - J.K. Moser, *Lectures on celestial mechanics*" Springer 1971 .

Fig.10: struttura qualitativa delle curve invarianti nell'intorno di un punto su di un'orbita periodica di prima specie con ordine di risonanza > 4 (da Arnold cit.).