

§ 5. PERTURBAZIONI, RISONANZE, DISEGUAGLIANZE SECOLARI.

Quale è l'effetto di una "piccola perturbazione" del problema dei due corpi, cioè nel nostro caso quali sono le soluzioni del problema (20) per $\mu \neq 0$ ma piccolo? Questo problema impegnò la ricerca matematica ed astronomica per più di 200 anni; occorre un secolo dalle prime osservazioni qualitative di Newton (1687) alla teoria delle perturbazioni formalmente completa di Lagrange (1782), ed un altro secolo per portare a termine i calcoli relativi ai pianeti del sistema solare fino alle elaboratissime teorie perturbative della fine dell'800 (contenenti centi-naia di termini). Ciò che interessa di più è che questa enorme massa di lavori teorici ed osservativi costituiva un esplicito programma di verifica della teoria della gravitazione di Newton: come diceva, verso la fine di questa fase storica, Poincaré: "lo scopo finale della meccanica celeste è di risolvere questa grande questione, di sapere se la legge di Newton spiega da sola tutti i fenomeni astronomici; il solo modo di arrivarvi è di fare delle osservazioni precise quanto è possibile e di compararle quindi con i calcoli. Questi calcoli non possono che essere approssimativi e non servirebbe a niente, d'altronde, calcolare più decimali di quelli che le osservazioni ci possono far conoscere" (++)).

(++) Poincaré, fatto questo omaggio alla teoria ben radicata nella tradizione, sviluppa poi il suo ragionamento in tutt'altra direzione (cfr. § 6).

Quanto alla misura dell'errore, è chiaro che in presenza di divisori $p n_0 - q$ non nulli ma molto piccoli si possono presentare termini delle serie (28) di ordine $|k_1| + |k_2|$ molto elevato però importanti, e quindi le teorie perturbative ordinarie non possono essere precise; anche i termini in μ^2 , μ^3 etc. possono diventare importanti se contengono un piccolo divisore. Perciò le teorie che vedono comparire piccoli divisori (come quella di Saturno e Giove, ma più ancora quelle dei satelliti di Giove, di Saturno e di Urano, e degli asteroidi) non possono raggiungere grande precisione malgrado enormi sforzi, come quelle i cui sviluppi in serie sono lentamente convergenti per altre ragioni (come nella teoria della Luna, che ancora nel 1896 dava luogo a disequaglianze di 15").

Bibliografia:

F. Tisserand "Traité de mécanique céleste", 4 volumi, Gauthiers-Villars, Paris 1892/1896 .