§ 5. PERTURBAZIONI, RISONANZE, DISEGUAGLIANZE SECOLARI.

Quale è l'effetto di una "piccola perturbazione" del problema dei due corpi, cioè nel nostro caso quali sono le soluzioni del problema (20) per $\mu \neq 0$ ma piccolo? Questo problema impegnò la ricerca matematica ed astronomica per più di 200 anni; occorse un secolo dalle prime osservazioni qualitative di Newton (1687) alla teoria delle perturbazioni formalmente completa di Lagrange (1782), ed un altro secolo per portare a termine i calcoli relativi ai pianeti del sistema solare fino alle elaboratissime teorie perturbative della fine dell'800 (contenenti centinaia di termini). Ciò che interessa di più è che questa enorme massa di lavori teorici ed osservativi costituiva un esplicito programma di verifica della teoria della gravitazione di Newton: come diceva, verso la fine di questa fase storica, Poincaré: "lo scopo finale della meccanica celeste è di risolvere questa grande questione, di sapere se la legge di Newton spiega da sola tutti i fenomeni astronomici; il solo modo di arrivarvi è di fare delle osservazioni precise quanto è possibile e di comparарle quindi con i calcoli. Questi calcoli non possono che essere approssimativi e non servirebbe a niente, d'altronde, calcolare più decimali di quelli che le osservazioni ci possono far conoscere" (++).

(++) Poincaré, fatto questo omaggio alla teoria ben radicata nella tradizione, sviluppa poi il suo ragionamento in tutt'altra direzione (cfr. § 6).

La sostanza matematica della "*teoria delle perturbazioni*" si può esporre, nel nostro "problema campione" dei due corpi ristretto piano e con la notazione moderna delle variabili azione-angolo, in poche formule : se la hamiltoniana (19) è sviluppabile in serie rispetto a μ : $H = H_0 + \mu H_1 + \dots$ dove i puntini stanno per $\sigma(\mu)$ per $\mu \to 0$, anche le soluzioni dipendenti dal parametro μ : $\ell(t,\mu)$, $g(t,\mu)$, $L(t,\mu)$, $G(t,\mu)$ saranno sviluppabili in serie rispetto a μ ; cerchiamo allora i termini del primo ordine in μ : ℓ_1, z_1 , L_1 , G_1 : avremo allora, eguagliando i termini di ordine 0 e 1 delle serie formali a 1° e 2° membro nelle equazioni di Hamilton (20), le *equazioni di Delaunay:*

(24) $$\dot{L}_1 = - \frac{\partial H_1}{\partial \ell} \qquad \dot{G}_1 = - \frac{\partial H_1}{\partial z}$$

(25) $$\dot{\ell}_1 = \frac{1}{L_1^3} + \frac{\partial H_1}{\partial L} \qquad \dot{z}_1 = - 1 + \frac{\partial H_1}{\partial G}$$

formulazione moderna delle celebri *equazioni di Lagrange* (1782) . Per comprendere il vantaggio delle equazioni (24) e (25) occorre osservare che, a meno di termini di ordine superiore al 1° in μ , si può sostituire nei secondi membri dentro H_1 soltanto i termini di ordine 0 in μ (+) , cioè le soluzioni L_0 = cost, G_0 = cost , $z_0 = g_0 - t$,

(+) con l'eccezione dell'L_1 che compare nel 2° membro della 1a delle (25).

$\ell_\circ = \frac{1}{L_\circ^3}\ t = n_\circ\ t$ (scelta l'origine dei tempi in modo che $\ell_\circ(0) = 0$) del problema dei *due* corpi P_1 e P_3 in coordinate rotanti , perchè i termini contenenti H_1 hanno già a fattore μ . Allora i secondi membri delle (24) e (25) contengono solo funzioni note del tempo e delle costanti $L_\circ$, $G_\circ$, $g_\circ$ (+) e perciò le (24) e (25) sono integrabili per quadrature (++) .

Il metodo classico per effettuare questa integrazione consiste nel ritorno agli epicicli, cioè nello *sviluppare la funzione perturbatrice* H_1 , che è periodica nelle variabili angolo ℓ, z , in *serie di Fourier:*

$$H_1(\ell,z,L,G) = \sum_{k_1,k_2} B_{k_1 k_2}(L,G)e^{i(k_1\ell+k_2 z)} \tag{26}$$

e quindi integrare termine a termine : per esempio per L_1 :

$$L_1(t) = L_\circ - \mu \sum_{k_1\neq 0} B_{k_1 k_2}(L,G)\ \ ik_1 \int_0^t e^{i(k_1\ell_0+k_2 z_0)}dt' \ . \tag{27}$$

Ora gli integrali nella (24) sono di due tipi: infatti l'argomento dell'esponenziale, come funzione del tempo, si legge:

$$k_1\ \ell_0 + k_2\ z_\circ = (k_1\ n_\circ - k_2)t + k_2\ g_0$$

e perciò da integrare nella (27) vi sono dei *termini risonanti* con

---

(+) con l'eccezione dell'L_1 che compare nel 2° membro della 1ª delle (25).

(++) la prima delle (25) con una doppia integrazione.

$k_1 n_\circ - k_2 = 0$ $(k_1 \neq 0)$, che danno luogo a funzioni lineari del tempo (*termini secolari*) e dei termini non risonanti che danno luogo, integrati, a *termini periodici* con la comparsa del "*divisore*" $k_1 n_\circ - k_2$ (e con *periodo* $\dfrac{2\pi}{k_1 n_\circ - k_2}$) :

$$
(28) \qquad \begin{aligned} L_1(t) = L_\circ - i\, \mu \sum_{\substack{k_1 n - k_2 = 0 \\ k_1 \neq 0}} B_{k_1 k_2}(L_\circ, G_\circ) k_1 e^{i k_2 g_\circ}\, t \, - \\ - \mu \sum_{\substack{k_1 n - k_2 \neq 0 \\ k_1 \neq 0}} B_{k_1 k_2} \frac{k_1}{k_1 n_\circ - k_2} e^{i\,(k_1 n_\circ - k_2)\,t + k_2 g_\circ} \end{aligned}
$$

Si noti che *non vi sono termini secolari che non provengano da risonanze*, cioè il termine $B_{\circ\circ}$ non compare (perchè H_1 è derivata rispetto ad ℓ che sta all'esponente e non rispetto alle variabili L, G che stanno nei coefficienti $B_{k_1 k_2}$) ("*Teorema di Lagrange (1776) della invariabilità dei semiassi maggiori*"); altro accade nelle (25) ("*moti secolari del pericentro*").

Supponiamo che non ci siano risonanze - cioè n_0 *irrazionale*. Questa ipotesi ha una sua legittimità perchè i razionali sono "meno" degli irrazionali (+).

(+) Sull'influsso del problema dei "piccoli divisori" in meccanica celeste sul successivo sviluppo della teoria della misura, cfr. Wintner cit. § 529; il problema andrebbe approfondito dal punto di vista storico, ma è certo che la motivazione per la teoria della misura non è quella puramente "insiemistica" che oggi si usa dare nei corsi elementari.

Allora se si conoscono i coefficienti $B_{k_1 k_2}$ e se per di più essi tendono a zero per k_1, $k_2 \to \infty$ si possono approssimare le serie a secondo membro della (28) con somme finite di funzioni trigonometriche. Per circa 100 anni - da Eulero a Delaunay - studiare il problema dei 3 corpi con metodi perturbativi volle dire aggiungere sempre nuovi termini alle somme parziali della serie a secondo membro della (28), ogni volta che compariva una "diseguaglianza" tra teoria ed osservazioni: i termini periodici per rendere conto di diseguaglianze periodiche a periodo $\frac{2\pi}{k_1 n_o - k_2}$ lungo o breve; i termini secolari (specie per g_1, ℓ_1) per rendere conto di variazioni sistematiche dei dati su di un periodo di molti decenni di osservazione. In realtà questi calcoli richiedono molte altre tecniche matematiche qui non descritte; per esempio i termini $B_{k_1 k_2}(L,G)$ venivano sviluppati in serie di potenze di $e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}$, in modo da poter trascurare le potenze elevate di e (per i pianeti $e < 0,25$).

Vale la pena di dare un'idea quantitativa del grado di accordo tra teoria ed osservazione raggiunto nella seconda metà dell'800 : le tavole compilate da Le Verrier negli anni 60-70 davano luogo a "diseguaglianze" di non più 2" - 3" su di un arco di tempo di 1 secolo (con qualche difficoltà particolare per Saturno, dovuta al termine a lungo periodo con frequenza $5n_o - 2$ se n_o è il moto medio di Saturno), con quattro sole eccezioni: due variazioni secolari negli elementi di Mercurio, una per Venere ed una per Marte. Nel 1895 Newcomb, compilate nuove tavole, analizzò il rapporto tra tutte le diseguaglianze e l'errore probabile delle osservazioni, concludendo che restava inspiegabile sulla base della teoria newtoniana un moto del perielio di Mercurio pari a circa 43" al secolo, ed era da considerarsi probabile un moto analogo (difficilmente separabile dall'errore sperimentale) dei perielio di Venere, la Terra e Marte di pochi secondi per secolo. Per la prima volta in oltre 200 anni si raggiungeva la prova sperimentale di una deviazione dalle leggi di Newton, la cui entità era tale da causare errori di predizione nella posizione di Mercurio visto da terra di al massimo 8" in campo ad 1 secolo: per intendersi sul valore di questo ordine di precisione , 8" corrispondono a circa $\frac{1}{2}$ secondo di tempo. La teoria Newtoniana - con tutti i progressi matematici della meccanica analitica classica - aveva abbassato il limite di precisione della predizione astronomica di 60 volte, dagli 8' di Keplero agli 8" di Einstein (1915 - 1917) .

Poichè la meccanica celeste rappresenta l'unico modo possibile di fare verifiche sperimentali di alta precisione della meccanica Newtoniana (+) , tutto il valore "paradigmatico" della meccanica classica nella storia della scienza si può riassumere in questi due dati: 230 anni di dominio incontrastato, un aumento di precisione di 60 volte nelle predizioni senza alcuna eccezione tra i corpi celesti osservabili (e di 240 volte con una sola eccezione) su di un arco di tempo di predizioni ed osservazioni di 250 anni.

(+) Ancora oggi, mentre è possibile conoscere le distanze nel sistema solare con un margine di errore di 1 metro (cioè con 12 cifre significative), la quarta cifra significativa della costante di gravitazione universale (in unità di misura terrestri) è incerta.

Resta da valutare il senso dello sviluppo in serie (28), la misura dell'errore commesso troncandolo dopo un numero finito di termini, e la legittimità dell'ipotesi di "*non risonanza*": $k_1 n_o - k_2 \neq 0$ per ogni $(k_1, k_2) \neq (0,0)$. Le tre questioni sono connesse: infatti verificare che $k_1 n_o - k_2 \neq 0$ per escludere risonanze con interi k_1, k_2 piccoli è facile, ma diventa sempre più sensibile all'errore sperimentale nella misura di n_o man mano che k_1, k_2 crescono;al limite per k_1 , $k_2 \to \infty$ i razionali sono densi, e quindi un'affermazione come "il moto medio di Saturno è non risonante" è "metafisica" .(+) Perciò ogni soluzione di prima approssimazione come la (28)può contenere termini secolari, sia pure molto piccoli poichè $B_{k_1 k_2}$ tende a 0 velocemente per $k_1,k_2 \to \infty$. Inoltre anche se n_o è irrazionale, la (28) può contenere termini affetti da "divisori" $k_1 n_o - k_2$ che possono essere molto piccoli, e quindi da moltiplicatori $\dfrac{1}{k_1 n_o - k_2}$ che possono essere molto rapidamente crescenti con k_1 e k_2 , per esempio più di un qualunque polinomio. Perciò anche in assenza di risonanze le serie (28) possono divergere per certi valori di n_o (che formano un denso).

(+) la giustificazione di affermazioni sull'irrazionalità di n_o è "metafisica" perchè finalistica: cioè n_o "deve" essere irrazionale perchè il problema "deve" essere risolubile.

Quanto alla misura dell'errore, è chiaro che in presenza di divisori $p\,n_o - q$ non nulli ma molto piccoli si possono presentare termini delle serie (28) di ordine $|k_1| + |k_2|$ molto elevato però importanti, e quindi le teorie perturbative ordinarie non possono essere precise; anche i termini in μ^2 , μ^3 etc. possono diventare importanti se contengono un piccolo divisore. Perciò le teorie che vedono comparire piccoli divisori (come quella di Saturno e Giove, ma più ancora quelle dei satelliti di Giove, di Saturno e di Urano, e degli asteroidi) non possono raggiungere grande precisione malgrado enormi sforzi, come quelle i cui sviluppi in serie sono lentamente convergenti per altre ragioni (come nella teoria della Luna, che ancora nel 1896 dava luogo a diseguaglianze di 15").

Bibliografia:

F. Tisserand "*Traité de mécanique céleste*", 4 volumi, Gauthiers-Villars, Paris 1892/1896 .