§ 1. CINEMATICA CELESTE E MOTI QUASI-PERIODICI.

Il problema matematico dell'astronomia antica è posto da *Platone* con queste parole: "Le stelle, rappresentando oggetti eterni, divini ed immutabili, si muovono con velocità uniforme attorno alla terra, come noi possiamo constatare, e descrivono la più regolare e perfetta di tutte le traiettorie, quella della circonferenza senza fine. Ma alcuni oggetti celesti, cioé il sole, la luna, i pianeti, vagano attraverso il cielo e seguono cammini complessi, con inclusione anche di moti retrogradi. Tuttavia, essendo corpi celesti, anche essi devono muoversi in maniera conforme al loro rango elevato: i loro moti devono perciò derivare da una qualche combinazione di cerchi perfetti, dal momento che non descrivono esattamente cerchi perfetti. Quali sono le combinazioni di moti circolari con velocità uniforme che possono spiegare così peculiari variazioni in un insieme coerente di moti regolari nel cielo?"

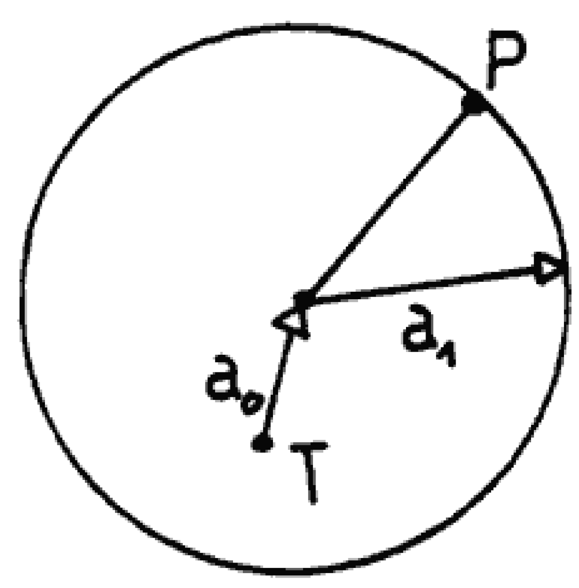
Gli astronomi greci seguirono alla lettera questo programma; supponiamo cioè che $z(t)$ sia una funzione che esprime qualche coordinata di un corpo celeste (per esempio, riducendoci al caso piano, $z(t) = x(t) + iy(t)$ possono essere le coordinate cartesiane del pianeta nel piano con la terra all'origine degli assi); allora essa dovrà esprimersi mediante uno sviluppo in somma di Fourier:

(1) $z(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, e^{i\omega_j t}$ Caso particolare di quello che in termini moderni si chiama una *"funzione condizionalmente periodica"* ,

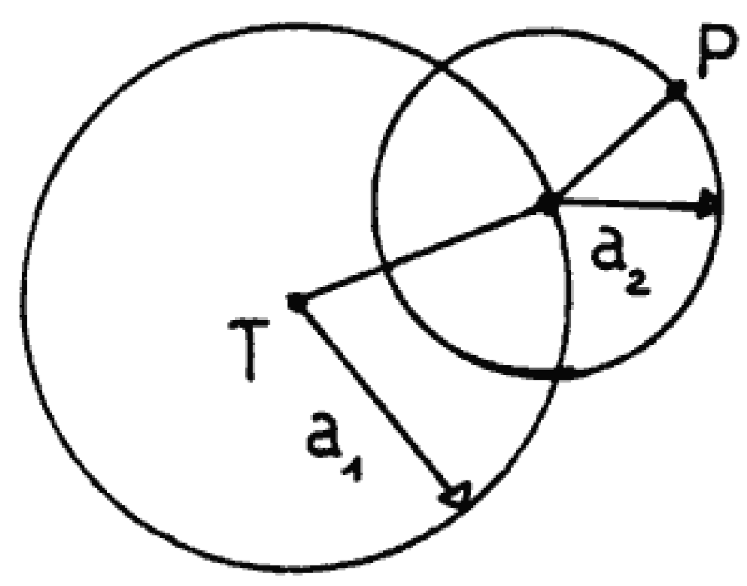
$z: R \to C$ con *"frequenze"* $\omega_1 \dots \omega_n$.

Ipparco per primo introdusse un *eccentrico*, cioè uno sviluppo $a_0 + a_1 e^{i\omega t}$ con due termini di cui una costante, per eliminare l'uso di funzioni non trigonometriche comune nelle tavole degli astronomi babilonesi. *Tolomeo* fondò la sua teoria, rimasta d'avanguardia per secoli, sull'uso di *epicicli* cioè della formula (1) con almeno due frequenze ω_1 , ω_2 indipendenti (ma anche di più: Tolomeo usa per i sette corpi celesti "non fissi" più di 50 termini $e^{i\omega t}$), in questo modo la posizione dei pianeti sul cielo poteva essere predetta per un periodo di molti anni e con un errore inferiore ai 2° (la teoria di Tolomeo era tridimensionale, cioé i cerchi non giacevano tutti su di un piano e gli a_j erano dei vettori di R^3).

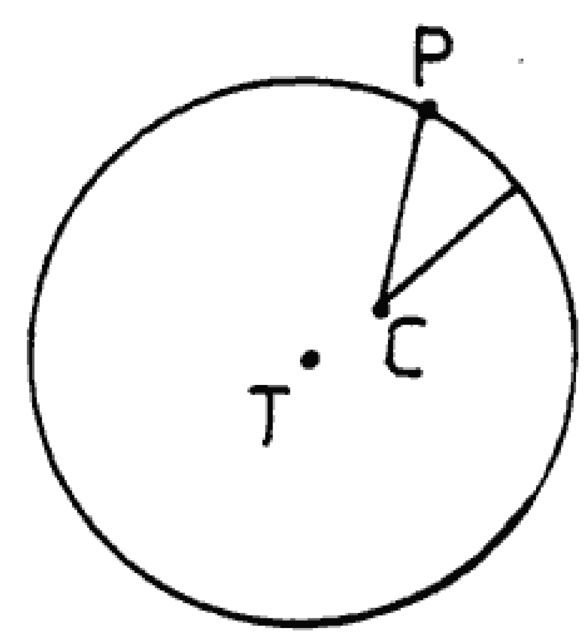
Fig.1:



Eccentrico



Epiciclo



Equante

Tuttavia nella formulazione di questa teoria Tolomeo fece anche uso di *equanti* , cioé di velocità angolari non costanti rispetto al centro del cerchio ma rispetto ad un altro punto eccentrico, e l'uso degli equanti parve a *Copernico* "né sufficientemente assoluto né sufficientemente ben accetto alla mente". Copernico tornò perciò agli sviluppi in funzioni trigonometriche con funzioni di fase $f_j(t) = \omega_j t$ lineari;

egli però osservò che nello sviluppo di tutti i pianeti e del sole compariva un termine con la stessa frequenza $\omega_1 = n$ moto medio del sole; e poichè

$$(2) \qquad a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} = a_2 e^{i\omega_2 t} + a_1 e^{i\omega_1 t}$$

niente impedisce di scambiare tra loro il *deferente* $a_1 e^{i\omega_1 t}$ con *l'epiciclo* $a_2 e^{i\omega_2 t}$ e di supporre che il termine con frequenza $\omega_1 = n$ sia il deferente per tutti i pianeti.

Ora Copernico scoprì che si poteva supporre che non solo il primo termine fosse di frequenza $\omega_1 = n$ per tutti i pianeti, ma che anche il coefficiente a_1 poteva essere lo stesso. In effetti, se le osservazioni sono puramente misure angolari dalla terra e non misure di distanza (come le osservazioni astronomiche sono rimaste fino al 1960 circa), e il punto di osservazione è l'origine, ciò che si osserva è (nel nostro modello semplificato piano) soltanto $\arg z(t)$ e pertanto poichè

$$(3) \qquad \arg z(t) = \arg \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\omega_j t} = \arg \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{r} e^{i\omega_j t} \qquad r \in \mathbb{R}, r > 0$$

ciò che si misura è soltanto il rapporto tra i raggi del deferente e degli epicicli di un pianeta $\left|\frac{a_1}{a_j}\right|$. Ma se il punto di osservazione è la terra che ruota lungo $a_1 e^{i\omega_1 t}$, allora $\arg[z(t)-a_1 e^{i\omega_1 t}]$ consente di misurare il rapporto di tutti i deferenti e gli epicicli di tutti i pianeti rispetto ad $|a_1| = 1$ unità astronomica. Perciò Copernico fissò i valori dei raggi delle orbite dei pianeti nel sistema eliocentrico, e i valori dei raggi dei relativi epicicli. Tuttavia il sistema di Copernico non portò ad una precisione di previsione superiore a quella di

Tolomeo. Perciò quando il re di Danimarca finanziò il primo grande centro di ricerca astronomica della storia, il castello-osservatorio di Uraniborg diretto da *Tycho Brahe*, e grazie agli studi di Tycho la precisione delle osservazioni astronomiche fatta con grandi strumenti fissi arrivò ad un margine di errore inferiore ai 2' , la teoria di Copernico e quella di Tolomeo assieme furono messe in crisi malgrado ogni tentativo di perfezionarle da un inspiegabile "*diseguaglianza*" di 8' nella longitudine della posizione di Marte, rilevato dall'assistente di Tycho, *Keplero*.

Di regola, questa parte della storia è esclusa dai trattati moderni di meccanica celeste, perchè - dicono alcuni - l'astronomia antica e medioevale fino a Newton è *puramente cinematica*, cioè descrive il moto e non ne "spiega" la fisica. Io non concordo con questa affermazione. L'astronomia antica è *empirica* ed *operativa*, nel senso che cerca di *descrivere* il moto come è verificato dall'esperienza di osservazioni fatte su di un lungo arco di tempo, e di *predire* la posizione futura dei pianeti, del sole e della luna, é perciò una *teoria fisica completa* nello stesso senso in cui lo è la moderna teoria delle particelle elementari.

Certo l'osservazione di Platone che le funzioni dell'astronomia debbono essere condizionalmente periodiche (come nella (1)) è "metafisica". In realtà è un dato empirico che le posizioni degli astri siano *quasi-periodiche nel senso di Bohr*: una funzione continua $f(t)$ si dice quasi- periodica se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $L(\varepsilon)$ tale che in ogni intervallo di $\mathbb{R}$ della forma $(a, a + L(\varepsilon))$ esiste un numero τ tale che :

$$(4) \qquad |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad t \in \mathbb{R} .$$

Ossia le posizioni degli astri non sono periodiche ma hanno degli ε - quasi periodi τ soddisfacenti la (4) per ε arbitrariamente piccolo.

Bene, *ogni funzione quasi-periodica può essere approssimata uniformemente (cioè in norma C^0) da funzioni della forma (1) (Teorema di Bohr 1926)*. Questo è un risultato matematico profondo, che si può far discendere dalla teoria delle rappresentazioni di gruppi (misura di Haar, teorema di Peter-Weyl). E' chiaro che l'osservazione di Platone, condivisa dagli astronomi antichi, sui moti circolari ha motivazioni metafisiche; tuttavia tra l'affermazione di Platone e il teorema di Bohr la differenza è un passaggio al limite, cioè il fatto che non sono necessariamente sufficienti un numero finito di termini per descrivere il moto di un corpo celeste, ma occorre una *serie di Fourier*. Vedremo come questa idea sia alla base della meccanica celeste del XVIII e XIX secolo.(+)

(+) L'affermazione fatta, che l'astronomia antica e medievale sia basata sull'esperienza, mi sembra nel complesso valida anche se non lo è necessariamente per tutti i singoli autori antichi.
Per esempio il carattere sperimentale dell'opera di Tolomeo è stato recentemente messo in dubbio da Robert R. Newton nel suo libro, dal clamoroso titolo "Il crimine di Claudio Tolomeo", di prossima pubblicazione (recensito in Scientific American, ottobre 1977, pag.79-81): secondo R. Newton, Tolomeo deduce le sue asserite osservazioni dalla sua teoria. Questa interpretazione merita comunque di essere verificata da una critica storica molto attenta e da calcoli precisi.

Bibliografia:
S. Sternberg "*Celestial Mechanics*" Benjamin, Amsterdam - N. York, 1969 Cap.I
"*The project phisics course*" Unità 2, Zanichelli - Bologna 1974
G. Cavallo e A.Messina "*Astronomia*" in "*Enciclopedia Einaudi*", vol. I Torino 1977.