4 - Fibrati vettoriali.

Un primo esempio di fibrati con struttura è dato da quelli vettoriali.

Gli spazi vettoriali topologici costituiscono una categoria di struttura.

Gli spazi vettoriali (topologici) a dimensione finita, o a dimensione n fissata, costituiscono pure una categoria di struttura.

(4.1) Definizione

Dicesi "fibrato vettoriale topologico (localmente banale)" ogni fibrato topologico

$$(E, \pi, B, J)$$

con struttura nella categoria $\mathfrak{J}$ degli spazi vettoriali topologici .

5 - Fibrati principali

Un secondo esempio di fibrati con struttura è data da quelli principali. Premettiamo la definizione di spazio affine di un gruppo e di omomorfismo di spazi affini.

(5.1) Definizione

Sia $\bar{G}$ un gruppo topologico.

Si dice "spazio affine sinistro(destro)" di $\bar{G}$ ogni terna

$$A \equiv (G, \bar{G}, \tau),$$

dove G è uno spazio topologico e

$$\tau : G \times \bar{G} \to G$$

è un'applicazione continua, i quali soddisfano alle seguenti condizioni:

4 - Fibrati vettoriali.

Un primo esempio di fibrati con struttura è dato da quelli vettoriali.

Gli spazi vettoriali topologici costituiscono una categoria di struttura.

Gli spazi vettoriali (topologici) a dimensione finita, o a dimensione n fissata, costituiscono pure una categoria di struttura.

(4.1) Definizione

Dicesi "fibrato vettoriale topologico (localmente banale)" ogni fibrato topologico

$$(E, \pi, B, J)$$

con struttura nella categoria $\mathfrak{F}$ degli spazi vettoriali topologici .

5 - Fibrati principali

Un secondo esempio di fibrati con struttura è data da quelli principali. Premettiamo la definizione di spazio affine di un gruppo e di omomorfismo di spazi affini.

(5.1) Definizione

Sia $\bar{G}$ un gruppo topologico.

Si dice "spazio affine sinistro(destro)" di $\bar{G}$ ogni terna

$$A \equiv (G, \bar{G}, \tau),$$

dove G è uno spazio topologico e

$$\tau : G \times \bar{G} \to G$$

è un'applicazione continua, i quali soddisfano alle seguenti condizioni:

a) $\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{gg'}$ $\qquad (\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{g'g})$ $\quad , \forall\, g,g' \in \bar{G};$

b) $\tau_1 = id_G$,

c) $q \in G,\ \tau(g,q) = q \implies g = 1;$

d) $\exists\ q \in G$ per cui $\tau_q(\bar{G}) = G$.

(5.2) Definizione

Siano $A \equiv (G,\bar{G},\tau)$ ed $A' \equiv (G',\bar{G}',\tau')$ due spazi affini sinistri(destri). Si dice omomorfismo di A in A' ogni applicazione

$$f : G \to G'$$

tale che esista un'applicazione (detta "la derivata")

$$D\, f \in \mathrm{Hom}\ (\bar{G},\bar{G}')$$

per cui $f(\tau(q,g)) = \tau'(f(q),\ D\, f(g))$, $\qquad \forall (q,g) \in G \times \bar{G}$.

Se $D\, f$ esiste, allora essa è unica. Inoltre ogni omomorfismo f risulta essere un'applicazione continua.

Gli spazi affini sinistri(destri) costituiscono una categoria di struttura.

Gli spazi affini sinistri(destri), relativi ad un gruppo topologico fissato, costituiscono una categoria di struttura.

Osserviamo che vale la regola della catena per le derivate. Esiste dunque un funtore covariante dalla categoria degli spazi affini (sinistri o destri) a quella dei gruppi topologici che associa ad ogni spazio affine G il gruppo $\bar{G}$ e ad ogni morfismo f la sua derivata Df.

Sia dunque $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ la categoria degli spazi affini sinistri(destri) relativi ad un gruppo topologico $\bar{G}$.

(5.3) Definizione

Dicesi "fibrato principale topologico sinistro(destro)(localmente banale)", di gruppo strutturale $\bar{G}$," ogni fibrato topologico

$$\mu \equiv (P, \underline{\mu}, B, Y)$$

con struttura nella categoria $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ degli spazi affini sinistri(destri) di $\bar{G}$.

Si noti che μ ha struttura anche nella categoria degli spazi affini sinistri (destri).

(5.4) Proposizione

Sia $\mu \equiv (P, \underline{\mu}, B, Y)$ un fibrato principale sinistro(destro), di gruppo strutturale $\bar{G}$.

Allora ogni elemento $g \in \bar{G}$ determina un automorfismo di μ su B

$$T_g : P \to P$$

dato da

$$T_g : p \to \tau_{\underline{\mu}(p)}(g,p),$$

dove $\tau_{\underline{\mu}(p)}$ è la traslazione relativa alla fibra $\underline{\mu}^{-1}(\underline{\mu}(p))$.

Pertanto $\bar{G}$ opera su P a sinistra (destra) fedelmente ed effettivamente (e transitivamente su ciascuna fibra), tramite l'applicazione indotta

$$T : \bar{G} \times P \to P.$$